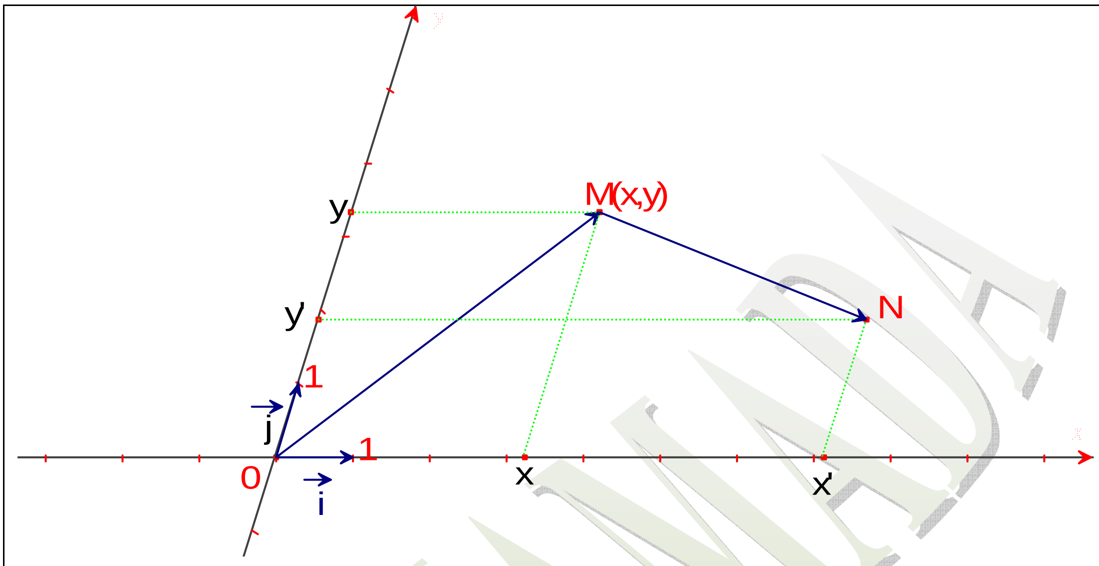
Chapitre 15

Géométrie Analytique

I – Activités dans un repère cartésien du plan

1 – Rappel



Soit $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$ un repère cartésien du plan

$(\vec{\imath},\vec{\jmath})$ est une base du plan

Le point M du plan est repéré dans le plan par ses coordonnées x (abscisse) et y (ordonnée) et est noté $M(x,y)$

Le vecteur $\overrightarrow{OM}$ est repéré dans le plan par ses coordonnées : $\overrightarrow{OM}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ ou $\overrightarrow{OM}=x\vec{\imath}+y\vec{\jmath}$

Le vecteur $\overrightarrow{MN}$ est repéré dans le plan par ses coordonnées : $\overrightarrow{MN}=\begin{pmatrix}x'-x\\y'-y\end{pmatrix}$ ou

$\overrightarrow{MN}=(x'-x)\vec{\imath}+(y'-y)\vec{\jmath}$

2 – Coordonnées du barycentre

Le plan est muni d'un repère cartésien $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$

- Soient $A(x,y), B(x',y')$ deux points du plan et I leur milieu on a $I(\frac{x+x'}{2},\frac{y+y'}{2})$
- Soient $A(x,y), B(x',y')$ deux points du plan et α et β deux réels tels que $\alpha+\beta\neq 0$. le barycentre G des points $(A,;\alpha)et\ (B,\beta)$ a pour coordonnées $G(\frac{\alpha x+\beta x'}{\alpha+\beta},\frac{\alpha y+\beta y'}{\alpha+\beta})$
- Soient $A(x,y), B(x',y'), C(x'',y'')$ trois points du plan et α , β et γ trois réels tels que $\alpha+\beta+\gamma\neq 0$. le barycentre G des points $(A,;\alpha),(B,\beta)et\ (C,\gamma)$ a pour coordonnées $G(\frac{\alpha x+\beta x'+\gamma x''}{\alpha+\beta+\gamma},\frac{\alpha y+\beta y'+\gamma y''}{\alpha+\beta+\gamma})$

Démonstration :

- Soit $G(x_0,y_0)$ le barycentre des points $(A,;\alpha),(B,\beta) et\ (C,\gamma)$ alors on a : $\alpha\overrightarrow{GA}+\beta\overrightarrow{GB}+\gamma\overrightarrow{GC}=\vec{0}$ donc $\alpha\begin{pmatrix}x-x_0\\y-y_0\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}x\prime-x_0\\y\prime-y_0\end{pmatrix}+\gamma\begin{pmatrix}x\prime\prime-x_0\\y\prime\prime-y_0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ soit

  $\begin{cases}\alpha x+\beta x'+\gamma x''-(\alpha+\beta+\gamma)x_0=0\\ \alpha y+\beta y'+\gamma y''-(\alpha+\beta+\gamma)y_0=0\end{cases}$ on obtient $\begin{cases}x_0=\frac{\alpha x+\beta x'+\gamma x''}{\alpha+\beta+\gamma}\\ y_0=\frac{\alpha y+\beta y'+\gamma y''}{\alpha+\beta+\gamma}\end{cases}$ d'où

  $G(\frac{\alpha x+\beta x'+\gamma x\prime\prime}{\alpha+\beta+\gamma},\frac{\alpha y+\beta y'+\gamma y\prime\prime}{\alpha+\beta+\gamma})$

Exemple :

Soient les points $A(2,1),B(-2,\frac{3}{2}),C(-1,0)$

1) Déterminer les coordonnées du point I milieu du segment $[AB]$

   On a $\begin{cases}\frac{2+(-2)}{2}=0\\ \frac{1+\frac{3}{2}}{2}=\frac{\frac{5}{2}}{2}=\frac{5}{4}\end{cases}$ $soit\ donc\ I(0,\frac{5}{4})$

2) Déterminer les coordonnées du point G barycentre des points $(A,3)$; $(B,-2)\ et\ (C,\frac{1}{2})$

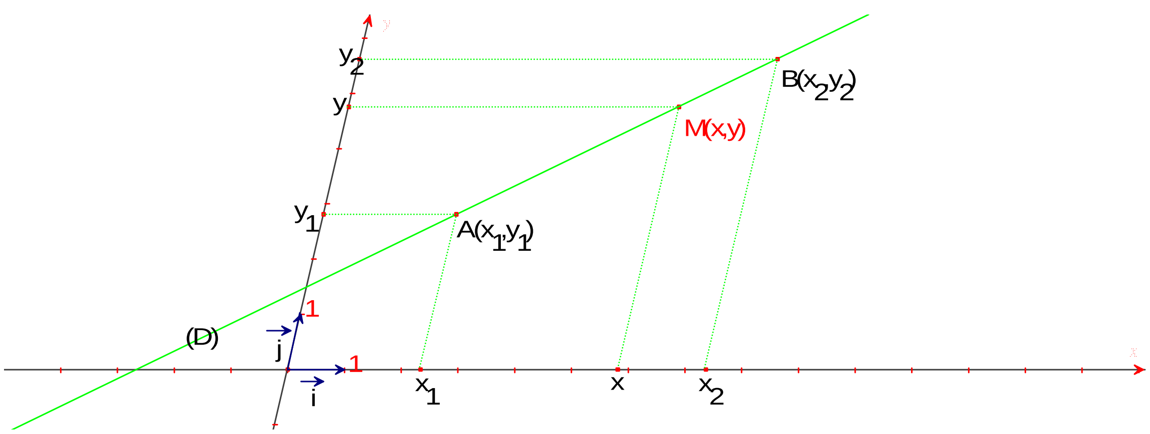
   On a $\begin{cases}\frac{3\times2+(-2)\times(-2)+\frac{1}{2}\times(-1)}{3+(-2)+\frac{1}{2}}=\frac{6+(-4)+(-\frac{1}{2})}{\frac{3}{2}}=1\\ \frac{3\times1+(-2)\times\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\times0}{3+(-2)+\frac{1}{2}}=\frac{3+(-3)+0}{\frac{3}{2}}=0\end{cases}$ $soit\ donc\ G(1,0)$

II – Equation cartésienne d'une droite

Le plan est muni d'un repère cartésien $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$

- Toute droite admet une équation cartésienne de la forme $ax+by+c=0,$ où $a,b\ et\ c$ trois réels avec $(a,b)\neq(0,0)$
- Soit $M(x_0,y_0)$ un point du plan ; M est un point de la droite D d'équation $ax+by+c=0$ Si et seulement si ses coordonnées vérifient l'équation c.à.d. on a $ax_0+by_0+c=0$

Démonstration :



$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}x_2-x_1\\y_2-y_1\end{pmatrix}$, donc $\overrightarrow{AB}=(x_2-x_1)\vec{\imath}+(y_2-y_1)\vec{\jmath}$

$\overrightarrow{AM}\binom{x-x_1}{y-y_1}$, donc $\overrightarrow{AM}=(x-x_1)\vec{\imath}+(y-y_1)\vec{\jmath}$

$M \in (AB)$ donc $\overrightarrow{AM}$ *et* $\overrightarrow{AB}$ *sont colinéaire* donc $\begin{vmatrix}(x-x_1) & (x_2-x_1)\\(y-y_1) & (y_2-y_1)\end{vmatrix}=0$

équivaut $(x-x_1)(y_2-y_1)-(x_2-x_1)(y-y_1)=0$

équivaut $(y_2-y_1)x+(x_1-x_2)y+[(x_2-x_1)y_1-(y_2-y_1)x_1]=0$

soit alors en posant $(y_2-y_1)=a\,;\ (x_1-x_2)=b\ et\ [(x_2-x_1)y_1-(y_2-y_1)x_1]=c$

on obtient $ax+by+c=0$ l'équation de la droite (AB)

Exemples :

1) Le plan muni d'un repère $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$; Soit la droite (D) d'équation $2x-3y+5=0$
   Montrer que $M(-1{,}1)\in(D)$ et que $N(0{,}2)\notin(D)$
   $M(-1{,}1)$: on a $2\times(-1)-3\times1+5=-2-3+5=0$ donc $M\in(D)$
   $N(0{,}2)$: on a $2\times0-3\times2+5=0-6+5=-1\neq0$ donc $N\notin(D)$
2) Le plan muni d'un repère $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$; Soit les points $A(2,-1)et\ B(3{,}2)$ déterminer une équation cartésienne de la droite (AB)
   $Soit\ M(x,y)\in(AB), donc\ \overrightarrow{AM}et\ \overrightarrow{AB}$ sont colinéaires alors $\begin{vmatrix}(x-2) & 1\\(y+1) & 3\end{vmatrix}=0$ équivaut
   $3(x-2)-1(y+1)=0$ équivaut $3x-y-7=0$ l'équation de (AB)

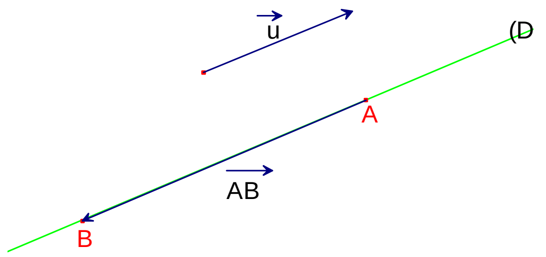
III – Vecteur directeur – Droites parallèles

1 – Vecteur directeur

Soit A un point du plan et $\vec{u}$ un vecteur non nul L'ensemble des points M du plan tels que les vecteurs $\overrightarrow{AM}\ et\ \vec{u}$ soient colinéaires est une droite appelée la droite passant par A et de vecteur directeur $\vec{u}$

Le plan est muni d'un repère cartésien $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$

- Soit D une droite et A , B deux points distincts de cette droite
  Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ est un vecteur directeur de la droite D
- Soit D la droite d'équation $ax+by+c=0$
  Le vecteur $\vec{u}\binom{-b}{a}$ est un vecteur directeur de D



Remarque : Soit D une droite de vecteur directeur $\vec{u}$.
Tout vecteur non nul colinéaire à $\vec{u}$ est aussi un vecteur directeur de D.

Démonstrations :

- A et B deux points de D donc la droite (AB) et D confondus donc parallèles donc de même direction donc $\overrightarrow{AB}$ est un vecteur directeur de D

- Soient $A(x_1, y_1) et\ B(x_2, y_2)$ deux points de D donc leurs coordonnées vérifient l'équation de D c.à.d. $ax_1 + by_1 + c = 0 \quad (1) \quad et \quad ax_2 + by_2 + c = 0 \quad (2)$
 Donc $(2) - (1): a(x_2 - x_1) + b(y_2 - y_1) = 0$
 $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de D
 $\vec{u}\ et\ \overrightarrow{AB}$ sont colinéaires en effet :
 $\begin{vmatrix} -b & x_2 - x_1 \\ a & y_2 - y_1 \end{vmatrix} = -b(y_2 - y_1) - a(x_2 - x_1) = -[a(x_2 - x_1) + b(y_2 - y_1)] = 0$ donc $\vec{u}\binom{-b}{a}$
 est un vecteur directeur de D

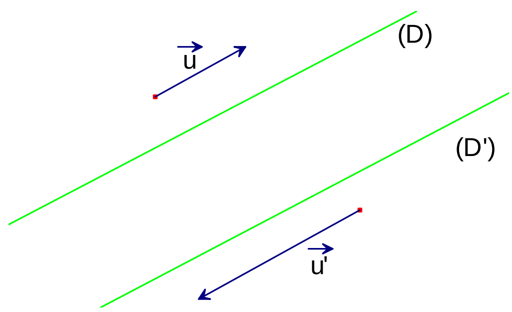
Exemples :
Le plan est muni d'un repère cartésien $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.
on considère la droite D d'équation $x + 3y + 2 = 0$.
1) Déterminer un vecteur directeur de la droite D.
Soit A et B deux points de D donc leurs coordonnées vérifient l'équation de D, il suffit donc de choisir l'abscisse x et de déterminer l'ordonnée .
A : $x = 0$, $0 + 3y + 2 = 0$ soit $y = -\frac{2}{3}$ soit $A(0, -\frac{2}{3})$
B : $x = 1$, $1 + 3y + 2 = 0$ soit $y = -1$ soit $B(1, -1)$
donc on obtient un vecteur directeur de D qui est $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$

2) Vérifier que $\vec{u}\binom{-3}{1}$ est un vecteur directeur de D.
On doit avoir $\vec{u}\ et\ \overrightarrow{AB}$ colinéaires or $\begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 1 & -\frac{1}{3} \end{vmatrix} = -3 \times \left(-\frac{1}{3}\right) - 1 \times 1 = 1 - 1 + 0$ donc $\vec{u}\ et\ \overrightarrow{AB}$ sont colinéaires, donc $\vec{u}\binom{-3}{1}$ est un vecteur directeur de D

2 – Condition analytique de parallélisme de deux droites

Le plan est muni d'un repère cartésien $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$

- Soient D et D' deux droites de vecteurs directeurs respectifs $\vec{u}\ et\ \vec{u'}$.
 (D et D' sont parallèles) si et seulement si ($\vec{u}\ et\ \vec{u'}$ sont colinéaires).
- Soient D et D' deux droites d'équations respectives $ax + by + c = 0\ et\ a'x + b'y + c' = 0$ D et D' sont parallèles si et seulement si $ab' - a'b = 0$



Démonstrations :

- D de vecteur directeur $\vec{u}$, soient A et B deux points de D donc $\vec{u}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires, de même D' de vecteur directeur $\overrightarrow{u'}$, soient A' et B' deux points de D' donc $\overrightarrow{u'}$ et $\overrightarrow{A'B'}$ sont colinéaires
  On a D//D' alors (AB) // (A'B') et donc $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{A'B'}$ sont colinéaires d'où $\vec{u}$ et $\overrightarrow{u'}$ sont colinéaires
  Réciproquement D de vecteur directeur $\vec{u}$ et D' de vecteur directeur $\overrightarrow{u'}$ tel que $\vec{u}$ et $\overrightarrow{u'}$ sont colinéaires, il existe deux points A et B de D tel que $\vec{u}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires et deux points A' et B' de D' tel que $\overrightarrow{u'}$ et $\overrightarrow{A'B'}$ sont colinéaires donc $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{A'B'}$ sont colinéaires alors (AB) // (A'B') et on tire que D // D'.

- D : $ax + by + c = 0$ (1), de vecteur directeur $\vec{u}\binom{-b}{a}$ et D' : $a'x + b'y + c' = 0$ (2), de vecteur directeur $\overrightarrow{u'}\binom{-b'}{a'}$
  D // D' donc $\vec{u}\binom{-b}{a}$ et $\overrightarrow{u'}\binom{-b'}{a'}$ sont colinéaires donc $\begin{vmatrix} -b & -b' \\ a & -a' \end{vmatrix} = 0$ c.à.d. $ab' - a'b = 0$
  Réciproquement soient deux droites D : $ax + by + c = 0$ (1), de vecteur directeur $\vec{u}\binom{-b}{a}$ et D' : $a'x + b'y + c' = 0$ (2), de vecteur directeur $\overrightarrow{u'}\binom{-b'}{a'}$
  On a $ab' - a'b = 0$ équivaut $\begin{vmatrix} -b & -b' \\ a & -a' \end{vmatrix} = 0$ donc $\vec{u}\binom{-b}{a}$ et $\overrightarrow{u'}\binom{-b'}{a'}$ sont colinéaires alors D // D'

Exemples :

Le plan est muni d'un repère cartésien $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. Déterminer la position des droites D et D'
D : $6x - 2y + 4 = 0$ et D' : $-9x + 3y - 2 = 0$
D : $6x - 2y + 4 = 0$ donc $a = 6$, $b = -2$ et $c = 4$ donc $\vec{u}\binom{2}{6}$ est un vecteur directeur de D
D' : $-9x + 3y - 2 = 0$ donc $\overrightarrow{u'}\binom{-3}{-9}$ est un vecteur directeur de D
$\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 6 & -9 \end{vmatrix} = 2 \times (-9) - 6 \times (-3) = -18 + 18 = 0$ donc $\vec{u}\binom{2}{6}$ et $\overrightarrow{u'}\binom{-3}{-9}$ sont colinéaires alors D // D' .

IV – Vecteur normal à une droite – Droites perpendiculaires

1 – Vecteur normal

On appelle vecteur normal à une droite tout vecteur non nul orthogonal à un vecteur directeur de cette droite.

Le plan est muni d'un repère orthonormé $\left(O,\vec{\imath},\vec{\jmath}\right)$

- Soit A un point du plan et $\vec{n}$ un vecteur non nul. L'ensemble des points M du plan tels que les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\vec{n}$ soient orthogonaux est une droite passant par A
- Soit D une droite d'équation $ax+by+c=0$
  Le vecteur $\vec{n}\binom{a}{b}$ est un vecteur normal à D

Démonstration :

- A un point du plan, $\vec{n}\neq\vec{0}$, soit C un point du plan tel que $\overrightarrow{AC}=\vec{n}$, M étant un point variable du plan tel que $\overrightarrow{AM}\ et\ \vec{n}$ soient orthogonaux donc $\overrightarrow{AM}\ et\ \overrightarrow{AC}$ orthogonaux alors le (AM) et (AC) sont perpendiculaires et donc l'ensemble des points M est une droite qui passe par A et tel que $\vec{n}$ soit un vecteur normal à cette droite
  Réciproquement, Soit $\vec{N}$ un vecteur non nul colinéaire à $\vec{n}$, M étant un point variable du plan tel que $\overrightarrow{AM}\ et\ \vec{N}$ soient orthogonaux donc $\overrightarrow{AM}\ et\ \vec{n}$ donc M est un point d'une droite qui passe par A et tel que $\vec{N}$ soit orthogonal à cette droite.
- Soit D : $ax+by+c=0$ et $\vec{u}\binom{-b}{a}$ un vecteur directeur de D et $\vec{n}\binom{\alpha}{\beta}$ un vecteur orthogonal à $\vec{u}\binom{-b}{a}$ donc $-b\alpha+a\beta=0$ donc en particulier pour $\alpha=a\ et\ \beta=b$
  on a :$-ba+ab=0$ donc $\vec{n}\binom{a}{b}$ est un vecteur normal à D.

Exemples :

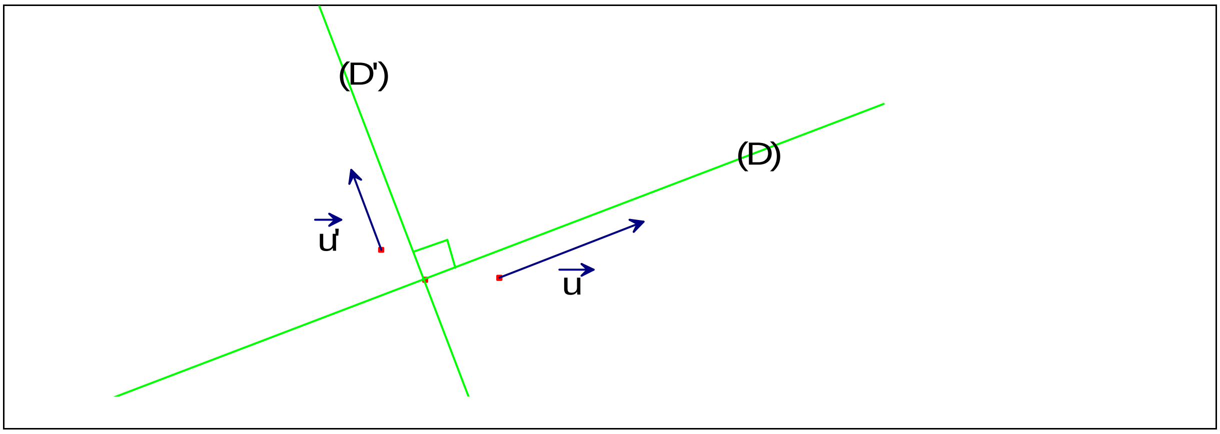
Le plan est muni d'un repère orthonormé $(o,\vec{\imath},\vec{\jmath})$

1) Déterminer un vecteur normal à la droite D : $5x+4y=0$
   On a : $a=5$; $b=4\ et\ c=0$ donc le vecteur normal à D est $\vec{n}\binom{5}{4}$
2) Déterminer une équation cartésienne de la droite D passant par $A(3,2)$ et de vecteur $\vec{n}\binom{1}{0}$ normal à D
   $\vec{n}\binom{1}{0}$ donc $a=1\ et\ b=0$, soit l'équation $x+c=0$ et comme $A\ \epsilon\ D$ alors on tire que $c=-3$ donc D : $x-3=0$

2 – Droites perpendiculaires

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(o,\vec{\imath},\vec{\jmath})$

- Soient D et D'deux droites de vecteurs directeurs $\vec{u}$ et $\overrightarrow{u'}$
  D ⊥ D' si et seulement si $\vec{u}\ \perp\ \overrightarrow{u'}$
- Soient D et D' deux droites d'équations respectives, $ax+by+c=0et\ a'x+b'y+c'=0$
  D ⊥ D' si et seulement si $aa'+bb'=0$



Démonstrations :

- Soient D droite du plan de vecteur directeur $\vec{u}$ et D' une deuxième droite du plan de vecteur directeur $\overrightarrow{u'}$ tel que D et D' soient orthogonales , soit A le point d'intersection de D et D' et M un point de D et N un point de D' donc $\overrightarrow{AM}$ *et* $\overrightarrow{AN}$ sont orthogonaux et on a $\overrightarrow{AM}$ *et* $\vec{u}$ sont colinéaires et de même $\overrightarrow{AN}$ *et* $\overrightarrow{u'}$ sont colinéaires donc $\vec{u}$ *et* $\overrightarrow{u'}$ sont orthogonaux.
  Réciproquement soient deux droites D et D' de vecteurs directeurs respectifs $\vec{u}$ *et* $\overrightarrow{u'}$ et tel que $\vec{u}$ *et* $\overrightarrow{u'}$ sont orthogonaux, alors soient A et B deux points de D et P et Q deux points de D' alors $\overrightarrow{AB}$ est un vecteur directeur de D et $\overrightarrow{PQ}$ un vecteur directeur de D' donc $\overrightarrow{AB}$ *et* $\overrightarrow{PQ}$ sont orthogonaux alors (AB) et (PQ) sont perpendiculaires donc D et D' sont perpendiculaires.
- D : $ax+by+c=0$,soit $\vec{u}\binom{-b}{a}$ un vecteur directeur de D
  D' : $a'x+b'y+c'=0$,soit $\overrightarrow{u'}\binom{-b'}{a'}$ un vecteur directeur de D'
  $\vec{u}$ *et* $\overrightarrow{u'}$ sont orthogonaux donc $(-b)(-b')+aa'=0$ soit $aa'+bb'=0$

Exemples :

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(o,\vec{\imath},\vec{\jmath})$

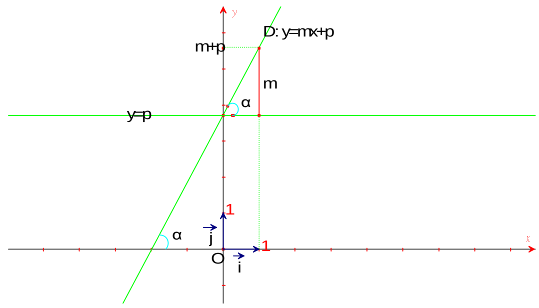
1) Montrer que D : $6x-5y+3\sqrt{2}=0$ et D' : $x+6y-2=0$ sont perpendiculaires
   D : $6x-5y+3\sqrt{2}=0$ on a $a=6$ *et* $b=-5$
   D' : $x+6y-2=0$ on a $a'=1$ *et* $b'=6$
   Or $aa'+bb'=6\times1+(-5)\times6=6-30=-24\neq0$ donc D et D' ne sont pas perpendiculaires.
2) Déterminer une équation cartésienne de la droite D' passant par $A(0,2)$ et perpendiculaire à D : $4x-y+3=0$

   D' ⊥ D donc $\vec{n}$ un vecteur normal à D est un vecteur directeur de D'alors $\vec{n}\binom{4}{-1}$ donc $a=-1$ *et* $b=-4$ on obtient $-x-4y+c=0$ et comme $A(0,2)\in D'$ on obtient $0-4\times2+c=0$ soit $c=8$ d'où D' : $-x-4y+8=0$

V – Equation réduite – Coefficient directeur

1 - Equation réduite – Coefficient directeur

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(o,\vec{\imath},\vec{\jmath})$



- Toute droite D non parallèle à l'axe $(O,\vec{\jmath})$ admet une équation du type $y = mx + p$. appelée l'équation réduite de la droite D. m est appelé le coefficient directeur de la droite D. p est l'ordonné à l'origine.
  On a $\tan(\alpha) = |m|$
- Soit D la droite d'équation réduite $y = mx + p$.
  Le vecteur $\vec{u}\binom{1}{m}$ est un vecteur directeur de D.
  Le vecteur $\vec{n}\binom{m}{-1}$ est un vecteur normal à D.
- Soient D et D' deux droites d'équations réduites respectives $y = mx + p \ et \ y = m'x + p'$
  D // D' si et seulement si $m = m'$
  D ⊥ D' si et seulement si $mm' = -1$

Démonstration :

- Le vecteur $\binom{-b}{a}$ est le vecteur directeur de la droite D deux cas sont possibles :
  1 – Si $b \neq 0$ on considère l'équation souvent sous la forme $y = -\frac{b}{a}\,x - \frac{c}{a} = mx + p$
  $m \ et \ p \ étant$ deux réels données l'ensemble des points $M(x,y)$ tels que $y = mx + p$ est une droite non parallèle à $(O,\vec{\jmath})$
  Réciproquement, une droite D non parallèle à $(O,\vec{\jmath})$
  Le plan est muni d'un repère cartésien $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$ étant donné , il existe deux réels $m \ et \ p$ tels que D soit l'ensemble des points $M(x,y)$ tels que $y = mx + p$
  Le réel $m = -\frac{b}{a}$ est appelé le coefficient directeur de la droite D
  2 – Si $b = 0$ alors l'équation de la droite est de la forme $x = -\frac{c}{a} = k \ (avec \ a \neq 0)$ donc D

  est parallèle à $(O,\vec{\jmath})$

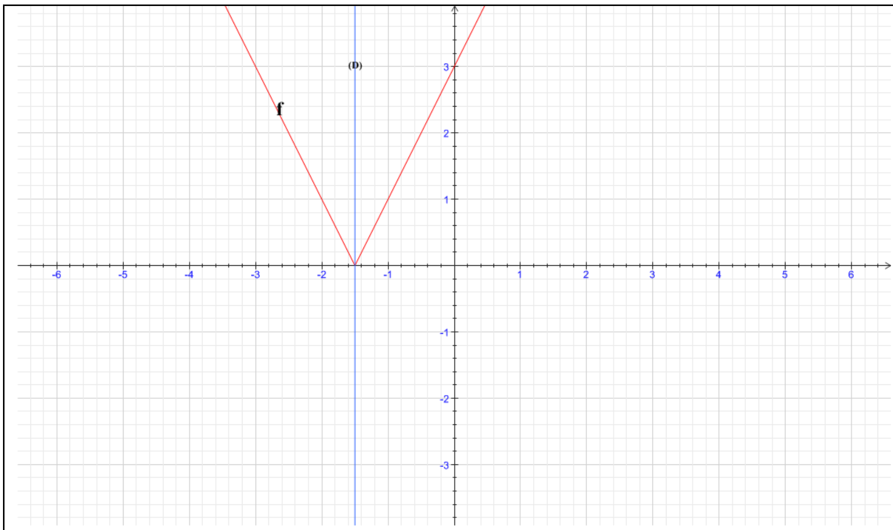
Exemples :

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(o,\vec{\imath},\vec{\jmath})$

1) Déterminer l'équation réduite de la droite D passant par $A(-5,-\frac{4}{7})$ et de coefficient directeur $m = 2$
   L'équation réduite de la droite D s'écrit $y = mx + p$ soit $y = 2x + p$ or $A\left(-5,-\frac{4}{7}\right) \in D$ donc $-\frac{4}{7} = 2 \times (-5) + p$ soit $p = \frac{64}{7}$ donc D : $y = 2x + \frac{64}{7}$
2) Soient D : $y = 4x + \sqrt{2}$ et D' : $y = -\frac{1}{4}x + 1$;D et D' sont elles perpendiculaires
   Le coefficient directeur de D est $= 4$, Le coefficient directeur de D' est $m' = -\frac{1}{4}$,
   on a $mm' = 4 \times \left(-\frac{1}{4}\right) = -1$ donc D ⊥ D'

3 - Fonction $x \longmapsto |ax + b|$

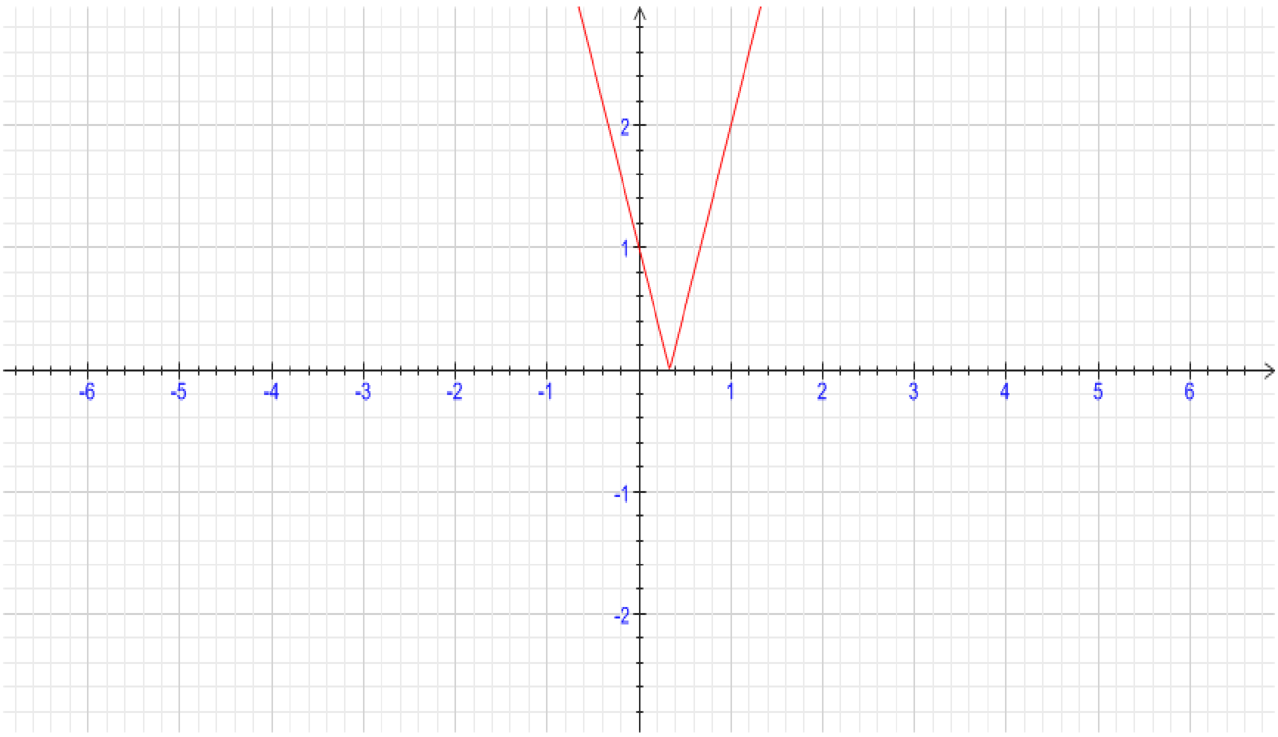
Le plan est muni d'un repère orthonormé $(o,\vec{\imath},\vec{\jmath})$



La courbe ci-dessus est la courbe représentative de la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = |ax + b|$ c'est la réunion de deux demi-droites de fonctions respectives $g(x) = ax + b$ et $h(x) = -g(x)$ cette courbe est symétrique par rapport à la droite d'équation $x = -\frac{b}{a}$ (avec $a \neq 0$)

Exemple :

Représenter dans un repère orthonormé la courbe de la fonction $f(x) = |-3x + 1|$

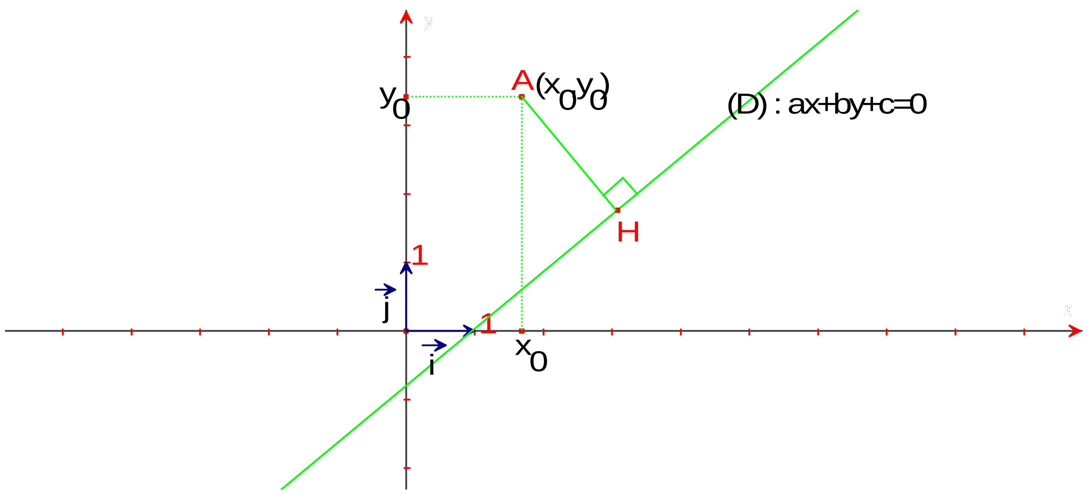


VI – Distance d'un point à une droite

Soit D une droite et A un point du plan.
On appelle distance du point A à la droite D, et on note $d(A, D)$, la distance du point A au point H, projeté orthogonal de A sur la droite D.

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(o,\vec{\imath},\vec{\jmath})$

Soit D la droite d'équation $ax+by+c=0$. La distance d'un point $A(x_0,y_0)$ à la droite D est $d(A,D)=\frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$



Démonstration :

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(o,\vec{\imath},\vec{\jmath})$

Soit $A(x_{0,}y_0)$ et D : $ax+by+c=0$ tel que $\notin D$, soit $H(x_1,y_1)$ le projeté orthogonal de A sur D. soit $\vec{n}\binom{a}{b}$ un vecteur normal à D alors on a $\overrightarrow{AH}\ et\ \vec{n}$ sont colinéaires donc il existe $k\ \in\ \mathbb{R}^*$ tel que $\overrightarrow{AH}=k.\vec{n}$, soit $AH=|k|.\|\vec{n}\|$ or $\|\vec{n}\|=\sqrt{a^2+b^2}$ donc $AH=|k|\sqrt{a^2+b^2}$

$H\ \in D$ donc $ax_1+by_1+c=0$ alors $(ax_1+by_1+c)-(ax_0+by_0+c)=0-(ax_0+by_0+c)$ soit $a(x_1-x_0)-b(y_1-y_0)=-(ax_0+by_0+c)$ et comme $\begin{cases}x_1=x_0+ka\\y_1=y_0+kb\end{cases}$ on tire $a(ka)+b(kb)=-(ax_0+by_0+c)$ équivaut $k(a^2+b^2)=-(ax_0+by_0+c)$ donc $|k|(a^2+b^2)=|ax_0+by_0+c|$ donc $|k|=\frac{|ax_0+by_0+c|}{(a^2+b^2)}$ donc $AH=\frac{|ax_0+by_0+c|}{(a^2+b^2)}\times\sqrt{a^2+b^2}$ alors on tire $AH=\frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$

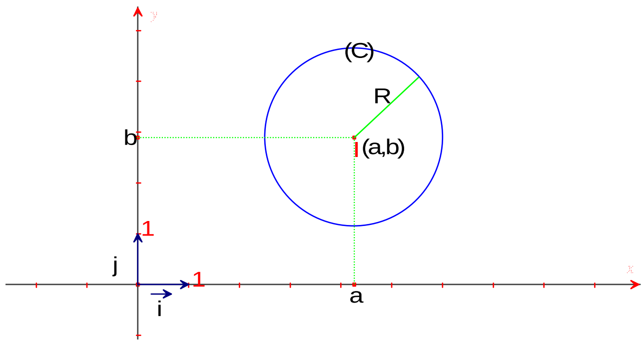
Exemple :

Déterminer la distance du point $A(6,2)$ à la droite D : $3x+y-1=0$

on a : $a=3\,,b=1\ et\ c=-1$ donc $d(A,D)=\frac{|3\times6+1\times2+(-1)|}{\sqrt{3^2+1^2}}=\frac{|19|}{\sqrt{10}}=\frac{19\sqrt{10}}{10}$

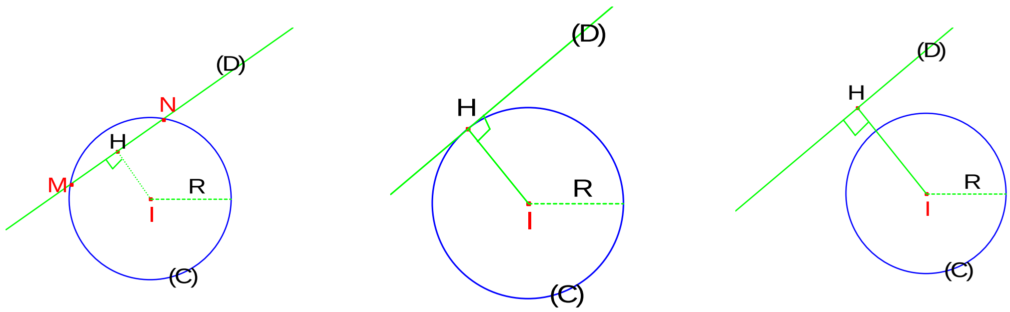
VII – Equation d'un cercle

Soit $I(a,b)$ un point du plan et R un réel strictement positif.
L'équation $(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2$ est appelée équation cartésienne du cercle C de centre I et de rayon R.

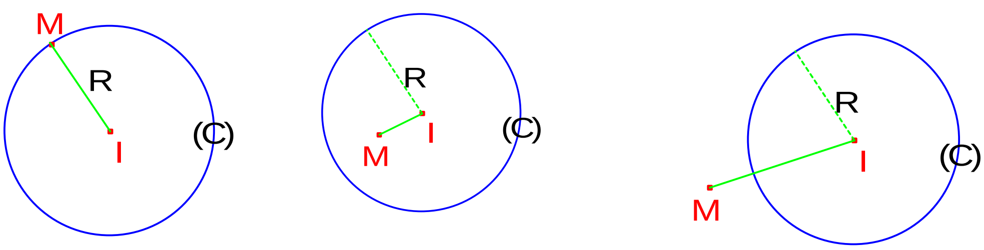


Le plan est muni d'un repère orthonormé $(o,\vec{\imath},\vec{\jmath})$

- Soit C un cercle de centre I et de rayon R et D une droite on a :
  $d(I,D) < R$ si et seulement si D et C sont sécants.
  $d(I,D) = R$ si et seulement si D est tangente à C .
  $d(I,D) > R$ si et seulement si D et C sont extérieurs



- Soit C un cercle d'équation $(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2$ et $M(x,y)$ un point du plan.
  $(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2$ si et seulement si M est sur le cercle C
  $(x-a)^2 + (y-b)^2 < R^2$ si et seulement si M est à l'intérieur du cercle
  $(x-a)^2 + (y-b)^2 > R^2$ si et seulement si M est à l'extérieur du cercle C



Exemple :

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(o,\vec{\imath},\vec{\jmath})$
1) On considère l'ensemble C d'équation : $x^2 + y^2 - x + 2y = 0$, montrer que C est un cercle dont on précisera le centre I et le rayon R.
$x^2 + y^2 - x + 2y = 0$ *équivaut* $(x^2 - 2 \times \frac{1}{2}x + \frac{1}{4} - \frac{1}{4}) + (y^2 + 2y + 1 - 1) = 0$ *équivaut*
$(x - \frac{1}{2})^2 + (y-(-1))^2 = \frac{5}{4}$ *équivaut* $IM^2 = R^2$ où $I(\frac{1}{2},-1)$ et $M(x,y)$ et $R = \frac{\sqrt{5}}{2}$ donc l'ensemble C est un cercle de centre $I\left(\frac{1}{2},-1\right)$ et de rayon $R = \frac{\sqrt{5}}{2}$

3) Soit D : $y = 2x - 1$, Montrer que D et C se coupent en deux points dont on déterminera les coordonnées.

Déterminons la distance de I à D, on a $d(I,D) = \frac{\left|2\times\frac{1}{2}+(-1)\times(-1)+(-1)\right|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}} = \frac{|1+1+(-1)|}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$ or

$\frac{\sqrt{5}}{5} < \frac{\sqrt{5}}{2}$ c.à.d. $d(I,D) < R$ donc C et D se coupent en deux points A et B

Donc $x^2 + (2x-1)^2 - x + 2(2x-1) = 0$ *équivaut* $5x^2 - x - 1 = 0$ soit $\Delta = 21$ on obtient $x_1 = \frac{1-\sqrt{21}}{10}$ *et* $x_2 = \frac{1+\sqrt{21}}{10}$ donc $A\left(\frac{1-\sqrt{21}}{10}, \frac{-4-\sqrt{21}}{5}\right)$ *et* $B\left(\frac{1+\sqrt{21}}{10}, \frac{-4+\sqrt{21}}{5}\right)$