

Chapitre 2

Problèmes du 1^{er} degré et

Problèmes du 2^{ème} degré

I – Problèmes du 1^{er} degré - Equations du 1^{er} degré – Inéquations du 1^{er} degré 1

On procède de la manière suivante pour la résolution d'un problème

- 1 – On détermine l'inconnue
- 2 – On ramène le problème à la résolution d'une équation (inéquation) du 1^{er} degré à une inconnue
- 3 – On résout l'équation (inéquation) et on détermine l'ensemble des solutions
- 4 – On interprète l'ensemble des solutions et on retient que les solutions adéquates
- 5 – On vérifie les solutions retenues

Exemples :

1 – Déterminer une fraction égale à $\frac{1}{7}$ et telle que la somme du numérateur et du dénominateur soit 200

- On note par x le numérateur de cette fraction
- le dénominateur de la fraction s'écrit $200 - x$, donc on tire $\frac{x}{200-x} = \frac{1}{7}$
- $\frac{x}{200-x} = \frac{1}{7}$ signifie $7x = 200 - x$ d'où $8x=200$ alors $x = \frac{200}{8}$ soit $x = 25$
- 25 est la sol^o du problème car une fraction, son numérateur est un entier relatif
- On a $\frac{25}{200-25} = \frac{25}{175} = \frac{25 \times 1}{25 \times 7} = \frac{1}{7}$
- On conclut que la fraction recherchée est $\frac{25}{175}$

2 – résoudre dans \mathbb{R} l'équation les équations suivantes $\frac{2x+3}{x-1} = \frac{4x}{2x+3}$; $\sqrt{3-2x} = 5$; $|2x+3| = 2$

- L'équation n'a un sens que si et seulement si $x - 1 \neq 0$ et $2x + 3 \neq 0$ soit $x \in \mathbb{R} \setminus \{1; -\frac{3}{2}\} \in$

$$\frac{2x+3}{x-1} = \frac{4x}{2x+3} \text{ équivaut } \frac{2x+3}{x-1} - \frac{4x}{2x+3} = 0 \text{ équivaut } \frac{(2x+3)^2 - 4x(x-1)}{(x-1)(x+4)} = 0 \text{ donc}$$

$$(2x+3)^2 - 4x(x-1) = 0 \text{ équivaut } 4x^2 + 12x + 9 - 4x^2 + 4x = 0 \text{ équivaut } 16x + 9 = 0$$

$$\text{équivaut } x = -\frac{9}{16} \text{ donc } \mathcal{S}_{\mathbb{R}} = \{-\frac{9}{16}\}$$

- L'équation n'a un sens que si et seulement si $3 - 2x \geq 0$ équivaut $x \leq \frac{3}{2}$ soit $x \in]-\infty, \frac{3}{2}]$

$$\sqrt{3-2x} = 5 \text{ équivaut } (\sqrt{3-2x})^2 = 5^2 \text{ équivaut } 3 - 2x = 25 \text{ équivaut } x = -11 \in]-\infty, \frac{3}{2}] \text{ donc}$$

$$\mathcal{S}_{\mathbb{R}} = \{-11\}$$

- $|2x + 3| = 2$ équivaut $2x + 3 = 2$ ou $2x + 3 = -2$ soit $x = -\frac{1}{2}$ ou $x = -\frac{5}{2}$ donc
 $\mathcal{S}_{\mathbb{R}} = \{-\frac{1}{2}, -\frac{5}{2}\}$

3 – Résoudre dans \mathbb{R} les inéquations suivantes $|x + 2| > 1$; $\sqrt{5x - 4} = \sqrt{x + 1}$

- $x + 2 = 0$ équivaut $x = -2$

x	$-\infty$	-2	$+\infty$
Sig $(x + 2)$	-		+
$ x + 2 $	$-x - 2$		$x + 2$

Si $x \in] -\infty, -2]$ on a $-x - 2 > 1$ équivaut $x < -3$ soit $x \in] -\infty, -3[\subset] -\infty, -2]$

Si $x \in] -2, +\infty[$ on a $x + 2 > 1$ équivaut $x > -1$ soit $x \in] -1, +\infty[\subset] -2, +\infty[$

On conclut que $\mathcal{S}_{\mathbb{R}} =] -\infty, -3[\cup] -1, +\infty[$

- $\sqrt{5x - 4} = \sqrt{x + 1}$ n'a un sens que si et seulement si $5x - 4 > 0$ et $x + 1 > 0$ soit $x > \frac{4}{5}$ et $x > -1$ on conclut que $x \in] \frac{4}{5}, +\infty[$

$\sqrt{5x - 4} = \sqrt{x + 1}$ équivaut $\sqrt{5x - 4}^2 = \sqrt{x + 1}^2$ équivaut $5x - 4 = x + 1$ équivaut

$x = \frac{5}{4} \in] \frac{4}{5}, +\infty[$ donc $\mathcal{S}_{\mathbb{R}} = \{\frac{5}{4}\}$

II – Problèmes du second degré – Equations du second degré

1 - Equations du second degré

a – Définition

Soient a, b et c trois réels avec $a \neq 0$. L'équation $ax^2 + bx + c = 0$ est dite équation du second degré d'inconnue x

b – Forme canonique

$a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \right]$ est appelée la forme canonique de $ax^2 + bx + c = 0$

Démonstration :

$$ax^2 + bx + c = a \left[x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} \right] = a \left[x^2 + 2 \frac{b}{2a}x + \left(\frac{b}{2a} \right)^2 - \left(\frac{b}{2a} \right)^2 + \frac{c}{a} \right]$$

$$= a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} \right] = a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \left(\frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a} \right) \right] = a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \right]$$

c – Discriminant

Le réel $b^2 - 4ac$ est noté Δ et appelé le discriminant de l'équation du second $ax^2 + bx + c = 0$

d – Solutions (racines) d'une équation du second degré

Soient a, b et c trois réels avec $a \neq 0$. On pose $f(x) = ax^2 + bx + c$, soit $\Delta = b^2 - 4ac$ le discriminant de l'équation $f(x) = 0$. On a :

	Les solutions	Factorisation
$\Delta < 0$	L'équation n'a pas de racines dans \mathbb{R}	On ne pas factoriser
$\Delta = 0$	L'équation a une seule racine dans \mathbb{R} $x_0 = -\frac{b}{2a}$	$f(x) = a(x - x_0)^2$
$\Delta > 0$	L'équation a deux racines distinctes dans \mathbb{R} $x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$; $x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$	$f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$

Cas particuliers :

*Si on a : $a+b+c=0$ alors on a $x_1 = 1$; $x_2 = \frac{c}{a}$

*Si on a : $a-b+c=0$ alors on a $x_1 = -1$; $x_2 = -\frac{c}{a}$

Démonstration :

$$ax^2 + bx + c = 0 \text{ équivaut } a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \right] = 0 \text{ équivaut } \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 = \frac{\Delta}{4a^2}$$

On distingue 3 cas : $\Delta < 0$ alors l'équation n'a pas de racines dans \mathbb{R}

$$\Delta = 0 \text{ alors } \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 = 0 \text{ équivaut } x + \frac{b}{2a} = 0 \text{ soit } x = -\frac{b}{2a}$$

$$\Delta > 0 \text{ alors } \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} = 0 \text{ équivaut } \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2a} \right)^2 = 0 \text{ équivaut}$$

$$\left(x + \frac{b-\sqrt{\Delta}}{2a} \right) \left(x + \frac{b+\sqrt{\Delta}}{2a} \right) = 0 \text{ équivaut } x + \frac{b-\sqrt{\Delta}}{2a} = 0 \text{ et } x + \frac{b+\sqrt{\Delta}}{2a} = 0$$

$$\text{soit } x = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \text{ et } x = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$$

e – Somme et produit des racines d'une équation du second degré

Soit l'équation du second degré $ax^2 + bx + c = 0$ on suppose qu'elle admet deux racines distinctes

$$x_1 \text{ et } x_2 \text{ alors on a la somme de ces deux racines } \mathcal{S} = x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \text{ et leur produit } \mathcal{P} = x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$$

Dans ce cas l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ est équivalente à l'équation $x^2 - \mathcal{S}x + \mathcal{P} = 0$

Démonstration :

$$*\mathcal{S} = x_1 + x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} + \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-b}{a} \text{ et } \mathcal{P} = x_1 \cdot x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \cdot \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{(-b)^2 - (\sqrt{\Delta})^2}{4a^2} = \frac{b^2 - \Delta}{4a^2} = \frac{b^2 - b^2 + 4ac}{4a^2} = \frac{c}{a}$$

$$* ax^2 + bx + c = 0 \text{ équivaut à } x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0 \text{ équivaut à } x^2 - \mathcal{S}x + \mathcal{P} = 0$$

f – Le discriminant réduit

Soient a, b et c trois réels avec $a \neq 0$ et l'équation du second degré $ax^2 + bx + c = 0$ et tel que $b = 2b'$ alors on a $\Delta = 4\Delta'$ où $\Delta' = b'^2 - ac$ est appelé le discriminant réduit et les

	Les solutions	Factorisation
$\Delta' < 0$	L'équation n'a pas de racines dans \mathbb{R}	On ne pas factoriser
$\Delta' = 0$	L'équation a une seule racine dans \mathbb{R} $x_0 = -\frac{b'}{a}$	$f(x) = a(x - x_0)^2$
$\Delta' > 0$	L'équation a deux racines distinctes dans \mathbb{R} $x_1 = \frac{-b' + \sqrt{\Delta'}}{a}$; $x_2 = \frac{-b' - \sqrt{\Delta'}}{a}$	$f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$

Démonstration :

$$ax^2 + bx + c = 0 \text{ et } b = 2b'$$

$$\text{donc } \Delta = b^2 - 4ac = (2b')^2 - 4ac = 4b'^2 - 4ac = 4(b'^2 - ac) = 4\Delta'$$

Si $\Delta < 0$ alors $\Delta' < 0$ et l'équation n'a pas de solutions

$$\text{Si } \Delta = 0 \text{ alors } \Delta' = 0 \text{ et l'équation a une seule racine } x_0 = -\frac{b}{2a} = -\frac{2b'}{2a} = -\frac{b'}{a}$$

$$\text{les solutions de l'équation s'écrivent } x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2b' + \sqrt{4\Delta'}}{2a} = \frac{-2b' + 2\sqrt{\Delta'}}{2a} = \frac{-b' + \sqrt{\Delta'}}{a}$$

$$\text{et de même on tire } x_2 = \frac{-b' - \sqrt{\Delta'}}{a}$$

g – Tableau de signe d'une expression de la forme $ax^2 + bx + c$

Soient a, b et c trois réels avec $a \neq 0$. On pose $f(x) = ax^2 + bx + c$ on obtient le signe de $f(x)$

Qui est en fonction du signe de C et du signe de a

* Si $\Delta \leq 0$ alors on a $f(x)$ a le même signe que a

* Si $\Delta > 0$ on obtient le tableau de signe suivant

x	$-\infty$	x_1	x_2	$+\infty$
$\text{sig } f(x)$	$\text{sig } a$		$\text{sig}(-a)$	$\text{sig } a$

Démonstration :

* Si $\Delta < 0$ on a $f(x) = ax^2 + bx + c = a \left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} \right]$ or $\Delta < 0$ donc $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} > 0$ et alors $f(x)$ a le même signe que a

* Si $\Delta = 0$ on a $f(x) = ax^2 + bx + c = a(x - x_0)^2$ or $(x - x_0)^2 \geq 0$ alors $f(x)$ a le même signe que a

* Si $\Delta > 0$ on a $f(x) = ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$ on obtient le tableau de signe suivant

x	$-\infty$	x_1	x_2	$+\infty$
$\text{sig}(x - x_1)$		-	+	+
$\text{sig}(x - x_2)$		-	-	+

$\text{sig}(x - x_1)(x - x_2)$	+	-	+
$\text{sig } f(x)$	$\text{sig } a$	$\text{sig } (-a)$	$\text{sig } a$

Exemples :

Soit l'expression $f(x) = 5x^2 - 3x - 1$ 1) Résoudre dans \mathbb{R} $f(x) = 0$ On a $a = 5$; $b = -3$; $c = 1$ on tire $\Delta = (-3)^2 - 4 \times 5 \times (-1) = 9 + 20 = 29 > 0$ donc l'équation admet deux racines distinctes $x_1 = \frac{-(-3) + \sqrt{29}}{2 \times 5} = \frac{3 + \sqrt{29}}{10}$ et $x_2 = \frac{3 - \sqrt{29}}{10}$ 2) Factoriser $f(x)$

$$f(x) = 5x^2 - 3x - 1 = 5 \left(x - \frac{3 + \sqrt{29}}{10} \right) \left(x - \frac{3 - \sqrt{29}}{10} \right)$$

3) Déterminer La somme et le produit des racines de $f(x) = 0$

$$\mathcal{S} = x_1 + x_2 = \frac{-(-3)}{5} = \frac{3}{5} \text{ et } \mathcal{P} = x_1 \cdot x_2 = \frac{-1}{5}$$

2 – Equations se ramenant à une équation du second degré

Exemples :

Résoudre dans \mathbb{R} les équations suivantes : $x + \frac{1}{x} + 2 = 0$; $\frac{x+2}{x-3} = \frac{1}{2x+1}$; $\sqrt{x-2} = x + 1$;

$$3x^4 - 5x^2 + 2 = 0$$

* $x + \frac{1}{x} + 2 = 0$ n'a un sens que si et seulement si $x \neq 0$ donc l'équation est équivalente à l'équation suivante $\frac{x^2 + 2x + 1}{x} = 0$ équivaut $x^2 + 2x + 1 = 0$ équivaut $(x + 1)^2 = 0$ équivaut

$$x + 1 = 0 \text{ équivaut } x = -1 \text{ donc } \mathcal{S}_{\mathbb{R}} = \{-1\}$$

* $\frac{x+2}{x-3} = \frac{1}{2x+1}$ n'a un sens que si et seulement si $x - 3 \neq 0$ et $2x + 1 \neq 0$ équivaut $x \neq 3$ et $x \neq -\frac{1}{2}$

$$\frac{x+2}{x-3} = \frac{1}{2x+1} \text{ équivaut } \frac{x+2}{x-3} - \frac{1}{2x+1} = 0 \text{ équivaut } \frac{(x+2)(2x+1) - (x-3)}{(x-3)(2x+1)} = 0 \text{ équivaut}$$

$$(x + 2)(2x + 1) - (x - 3) = 0 \text{ équivaut } 2x^2 + x + 4x + 2 - x + 3 = 0 \text{ équivaut}$$

$$2x^2 + 4x + 5 = 0 \text{ donc } a = 2, b' = 2 \text{ et } c = 5 \text{ soit alors } \Delta' = 2^2 - 2 \times 5 = 4 - 10 = -6 < 0$$

$$\text{donc } \mathcal{S}_{\mathbb{R}} = \emptyset$$

* $\sqrt{x-2} = x + 1$ n'a un sens que si et seulement si $x - 2 \geq 0$ et $x + 1 \geq 0$ soit $x \geq 2$ et $x \geq -1$ donc $x \in [2, +\infty[$

$$\sqrt{x-2} = x + 1 \text{ équivaut } (\sqrt{x-2})^2 = (x + 1)^2 \text{ équivaut } x - 2 = x^2 + 2x + 1 \text{ équivaut}$$

$$x^2 + x + 3 = 0 \text{ soit } a = b = 1 \text{ et } c = 3 \text{ donc } \Delta = -11 < 0 \text{ d'où } \mathcal{S}_{\mathbb{R}} = \emptyset$$

* $3x^4 - 5x^2 + 2 = 0$ on pose $X = x^2$ l'équation s'écrit $3X^2 - 5X + 2 = 0$ soit

$a = 3, b = -5$ et $c = 2$ alors $\Delta = 1 > 0$ donc l'équation admet deux racines distinctes

$$X' = \frac{5+\sqrt{1}}{2 \times 3} = \frac{6}{6} = 1 \text{ et } X'' = \frac{5-\sqrt{1}}{2 \times 3} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3} \text{ or } X' = x^2 = 1 \text{ équivaut } x = 1 \text{ ou } x = -1 \text{ et } X'' = x^2 = \frac{2}{3}$$

$$\text{équivaut } x = \sqrt{\frac{2}{3}} \text{ ou } x = -\sqrt{\frac{2}{3}} \text{ d'où } \mathcal{S}_{\mathbb{R}} = \{1, -1, \sqrt{\frac{2}{3}}, -\sqrt{\frac{2}{3}}\}$$

3 – Inéquations du second degré

Exemples :

Résoudre dans \mathbb{R} les inéquations suivantes : $(x - 1)(-x^2 + 2) < 0$; $\frac{x^2+3x}{x^2+5x+6} \geq 0$

* $(x - 1)(-x^2 + 2) < 0$; on a $x - 1 = 0$ équivaut $x = 1$ et $-x^2 + 2 = 0$ équivaut $x = -\sqrt{2}$ ou $x = \sqrt{2}$ donc soit le tableau de signe suivant

x	$-\infty$	$-\sqrt{2}$	1	$\sqrt{2}$	$+\infty$
$sig(x - 1)$		-	-	+	+
$sig(-x^2 + 2)$	-	-	+	+	-
$sig(x - 1)(-x^2 + 2)$	+	-	-	+	-

On conclut que $\mathcal{S}_{\mathbb{R}} = [-\sqrt{2}, 1] \cup [\sqrt{2}, +\infty[$

* $\frac{x^2+3x}{x^2+5x+6} \geq 0$ a un sens que si et seulement si $x^2 + 5x + 6 \neq 0$ donc la résolution de

$$x^2 + 5x + 6 = 0 \text{ où } a=1, b=5 \text{ et } c=6 \text{ donne } \Delta = 1 \text{ soit les racines sont } x_1 = -3 \text{ et } x_2 = -2$$

On conclut que $\frac{x^2+3x}{x^2+5x+6} \geq 0$ a un sens que pour $x \neq -3$ et $x \neq -2$

$$x^2 + 3x = 0 \text{ équivaut } x(x + 3) = 0 \text{ équivaut } x = 0 \text{ ou } x + 3 = 0 \text{ équivaut } x = 0 \text{ ou } x = -3$$

On dresse le tableau de signe suivant

x	$-\infty$	-3	-2	0	$+\infty$
$sig(x^2 + 3x)$		+	-	-	+
$sig(x^2 + 5x + 6)$	-	-	-	+	+
$sig\left(\frac{x^2 + 3x}{x^2 + 5x + 6}\right)$	+	+	-	-	+

On tire donc $\mathcal{S}_{\mathbb{R}} =]-\infty, -3[\cup]-3, -2[\cup]0, +\infty[$

4 - Problèmes du second degré

On procède de la manière suivante pour la résolution d'un problème

1 – On détermine l'inconnue

2 – On ramène le problème à la résolution d'une équation (inéquation) du 2^{ème} degré à une inconnue

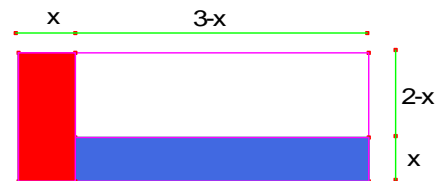
3 – On résout l'équation (inéquation) et on détermine l'ensemble des solutions

4 – On interprète l'ensemble des solutions et on retient que les solutions adéquates

5 – On vérifie les solutions retenues

Exemple :

Un peintre dispose d'un tissu rectangulaire de longueur 3m et de largeur 2m. Sur ce tissu, il veut dessiner deux bandes de même largeur, comme l'indique la figure, de sorte que l'aire des deux bandes soit égale à l'aire de la partie restante. Déterminer la largeur commune convenable.



L'inconnu est la largeur de la bande qu'on note par x

La bande noire a une aire égale à $2x$

La bande Bleu a une aire égale à $(3 - x)x$

Le rectangle blanc a une aire égale à $(3 - x)(2 - x)$

On tire donc $2x + (3 - x)x = (3 - x)(2 - x)$

$2x + (3 - x)x = (3 - x)(2 - x)$ équivaut $2x^2 - 10x + 6 = 0$ équivaut $x^2 - 5x + 3 = 0$ on a $a=1$, $b=-5$ et $c=3$ soit $\Delta = 13$ alors $x_1 = \frac{5+\sqrt{13}}{2}$ et $x_2 = \frac{5-\sqrt{13}}{2}$

x représente une distance donc doit être un réel positif et on a x_1 et x_2 sont tous les deux positifs

Car $5 > \sqrt{13}$

On vérifie $2 \times \frac{5+\sqrt{13}}{2} + \left(3 - \frac{5+\sqrt{13}}{2}\right) \frac{5+\sqrt{13}}{2} = 5 + \sqrt{13} + \frac{3}{2}(5 + \sqrt{13}) - \frac{(5+\sqrt{13})^2}{4} = \frac{25}{2} + \frac{5}{2}\sqrt{13} - \frac{19}{2} - \frac{5}{2}\sqrt{13} = 3$ c'est l'aire des deux bandes noire et bleu

$\left(3 - \frac{5+\sqrt{13}}{2}\right) \left(2 - \frac{5+\sqrt{13}}{2}\right) = 6 - 5 \times \frac{5+\sqrt{13}}{2} + \frac{(5+\sqrt{13})^2}{4} = 6 - \frac{25}{2} - \frac{5}{2}\sqrt{13} + \frac{19}{2} + \frac{5}{2}\sqrt{13} = 3$ c'est l'aire du rectangle blanc