Chapitre 3 Notions de polynômes

I – Notion de fonctions

Définition

Soit E une partie non vide de $\mathbb{R}$. Lorsque à tout réel x de E, on associe au plus un réel y , on dit qu'on a définit une fonction de E vers $\mathbb{R}$.

Si on désigne par f cette fonction, on note $y = f(x)$ et note $f: E \longrightarrow \mathbb{R}$

$$x \longmapsto f(x)$$

L'ensemble D des réels x de E tel que f(x) existe est appelé l'ensemble de définition de la fonction f.

On dira alors que f est définie sur D

Vocabulaire :

Soit D l'ensemble de définition de f , x un réel appartenant à D et $y = f(x)$ on dit que

* Le réel y est l'image de x par la fonction f.

* x est un antécédent du réel y par f

Exemples :

Déterminer l'ensemble de définition de chacune des fonctions suivantes

a) $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto 3x - 9$ b) $g: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $z \longmapsto \sqrt{z-2}$ c) $k: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto \frac{6x-1}{2x+3}$

f est définie pou tout $\mathbb{R}$

on doit avoir $z - 2 \geq 0$ soit $z \geq 2$ donc g est définie pour $x \in [2, +\infty[$

on doit avoir $2x + 3 \neq 0$ donc $x \neq \frac{-3}{2}$ donc k est définie pour tout $x \in \mathbb{R}\backslash\{\frac{-3}{2}\}$

II – Fonction polynôme

Définition

Soient $a_0 , a_1 , \dots , a_{n-1}\ et\ a_n$ des réels

La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = a_n\, x^n + a_{n-1}\, x^{n-1} + \cdots + a_1\, x + a_0$ est appelée fonction polynôme.

Les réels $a_0 , a_1 , \dots , a_{n-1}\ et\ a_n$ sont appelés les coefficients de la fonction polynôme.

Remarque : par abus de langage on dit le polynôme f au lieu de fonction polynôme

Si $a_0 = a_1 = \cdots = a_{n-1} = a_n = 0$ alors f est un polynôme nul

Exemples :

a) $F: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est un polynôme ; b) $G: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ n'est pas un polynôme
$x \longmapsto -2x^3 - 5x^2 - 1$; $x \longmapsto |x|$

c) $H: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est un polynôme

$x \longmapsto -2(x+1)^3 + 5x^2 - 4x$

car $H(x) = -2(x+1)^3 + 5x^2 - 4x = -2(x^3 + 3x^2 + 3x + 1) + 5x^2 - 4x$

$= -2x^3 - x^2 - 10x - 2$

III – Egalité de deux fonctions polynôme

1 – Degré d'un polynôme

Définition

On admet que tout polynôme non nul P a une écriture unique de la forme

$P(x) = a_n\, x^n + a_{n-1}\, x^{n-1} + \cdots + a_1\, x + a_0$ avec $a_n \neq 0$

L'entier n est appelé le degré du polynôme P, On écrit d°(P)=n

On convient que le polynôme nul n'a pas de degré

Le degré d'un polynôme constant est égal à zéro

Vocabulaire :

* a_0 s'appelle terme constant

* $a_1\, x$ s'appelle le terme du premier degré ou le terme en x

* $a_n\, x^n$ s'appelle le terme de degré n ou le terme en x^n (ou terme du plus haut degré)

*chacun des termes $a_0 , a_1\, x, \dots , a_{n-1}\, x^{n-1}$ *et* $a_n\, x^n$ est appelé monôme

*Tout polynôme du premier degré ($f(x) = a_1\, x + a_0$) est appelé binôme du premier degré

* Tout polynôme du second degré ($f(x) = a_2x^2 + a_1\, x + a_0$) est appelé trinôme du second degré

2 – Egalité de fonctions polynômes

Définition

On considère les deux fonctions polynômes $P(x)$ et $Q(x)$ définies par
$P(x) = a_n\, x^n + \cdots + a_1\, x + a_0$ et $Q(x) = b_n\, x^n + \cdots + b_1\, x + b_0$
On a $P(x) = Q(x)$ si et seulement si on a d°(P)=d°(Q) et $a_n = b_n , \dots , a_1 = b_1 , a_0 = b_0$

IV – Opérations sur les fonctions polynômes

Définition

Soit f et g deux polynômes et α n réel.

* On appelle somme de f et g le polynôme noté f+g et définie pour tout réel x par $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$

* On appelle produit du polynôme f par le réel α le polynôme noté αf et définit pour tout réel x par $\alpha f(x) = \alpha f(x)$

* On appelle produit des polynômes f et g le polynôme fg et définie pour tout réel x par $fg(x) = f(x).g(x)$

Exemples :

a) $P(x) = 3x^4 - 7x^2 + x$ est de degré 4
b) $Q(x) = (2x+1)(2x^3+8x-1) = 4x^4 + 8x^2 - 2x + 2x^3 + 8x - 1 = 4x^4 + 2x^3 + 6x - 1$ $donc\ d°(V) = 4$
c) $(P+Q)(x) = P(x) + Q(x) = 3x^4 - 7x^2 + x + 4x^4 + 2x^3 + 6x - 1 = 7x^4 + 2x^3 - 7x^2 + 7x - 1$
d) $(3P - 2Q)(x) = 3P(x) - 2Q(x) = 3(3x^4 - 7x^2 + x) - 2(4x^4 + 2x^3 + 6x - 1) = 9x^4 - 21x^2 + 3x - 8x^4 - 4x^3 - 12x + 2 = x^4 - 4x^3 - 21x^2 - 9x + 2$
e) $(PQ)(x) = P(x).Q(x) = (3x^4 - 7x^2 + x).(4x^4 + 2x^3 + 6x - 1) = 3x^4.4x^4 + 3x^4.2x^3 + 3x^4.6x - 3x^4.1 - 7x^2.4x^4 - 7x^2.2x^3 - 7x^2.6x - 7x^2.1 + x.4x^4 + x.2x^3 + x.6x - x.1 = 12x^8 + 6x^7 + 18x^5 - 3x^4 - 28x^6 - 14x^5 - 42x^3 - 7x^2 + 4x^5 + 2x^4 + 6x^2 - x = 12x^8 + 6x^7 - 28x^6 + 8x^5 - x^4 - x^2 - x$

V – Racines d’un polynômes – factorisation d’un polynôme

1 – racine d’un polynôme

Définition

On dit qu’un réel α est une racine ou un zéro d’un polynôme f si $f(\alpha) = 0$

Exemple :

Soit $f(x) = 4x^4 + 5x^3 - 14x^2 - 9x + 14$ on a $f(-2) = 4(-2)^4 + 5(-2)^3 - 14(-2)^2 - 9(-2) + 14 = 4 \times 16 + 5 \times (-8) - 14 \times 4 + 18 + 14 = 64 - 40 - 56 + 32 = 96 - 96 = 0$ donc -2 est une racine (ou un zéro) de f

2 – factorisation d’un polynôme

Définition

Soit P et Q deux polynômes. On dit que le polynôme P est factorisable par le polynôme Q s’il existe un polynôme R tel que pour tout réel x, $P(x) = Q(x).R(x)$

Exemple :

Soit $P(x) = 3x^3 - 13x^2 - 11x + 5$

1) Vérifier que -1 et 5 sont des racines de P

$P(-1) = 3(-1)^3 - 13(-1)^2 - 11(-1) + 5 = -3 - 13 + 11 + 5 = -16 + 16 = 0$
$P(5) = 3(5)^3 - 13(5)^2 - 11(5) + 5 = 3 \times 125 - 13 \times 25 - 55 + 5 = 375 - 325 - 55 + 5 = 380 - 380 = 0$

2) Factoriser P
On a -1 et 5 sont des racines de P donc P s'écrit $P(x) = (x+1)(x-5)Q(x)$
Comme d°(P)=3 on tire que d°(Q)=1 alors Q s'écrit $Q(x) = a_1 x + a_0$ donc on obtient

$P(x) = (x+1)(x-5)(a_1 x + a_0) = a_1 x^3 + a_0 x^2 - 5a_1 x^2 - 5a_0 x + a_1 x^2 + a_0 x - 5a_1 x - 5a_0 = a_1 x^3 + (a_0 - 4a_1)x^2 - (5a_1 + 4a_0)x - 5a_0$
Par identification on tire $a_1 = 3$, $a_0 - 4a_1 = -13$, $-(5a_1 + 4a_0) = -11$, $-5a_0 = 5$
soit alors $a_1 = 3$, $a_0 = -1$ donc $P(x) = (x+1)(x-5)(3x+1)$

3 – Polynômes symétriques de degré 3

Soit $f(x) = ax^3 + bx^2 + bx + a$ un polynôme de degré 3

On a -1 est une racine de f et on obtient la factorisation de f tel que $f(x) = (x+1)Q(x)$

Où $Q(x)$ est un trinôme du second degré qui s'écrit $Q(x) = ax^2 + (b-a)x + a$ tel que son discriminant $\Delta = (b-3a)(b+a)$

$Si\ a > 0$ on obtient le tableau suivant

b	$-\infty$ $\quad -a$	$\quad 3a$	$+\infty$
sig$(b-3a)$	$-$	$-$	$+$
sig$(b+a)$	$-$	$+$	$+$
Sig Δ	$+$	$-$	$+$

$Si\ a < 0$ on obtient le tableau suivant

b	$-\infty$ $\quad 3a$	$\quad -a$	$+\infty$
sig$(b-3a)$	$-$	$-$	$+$
sig$(b+a)$	$-$	$+$	$+$
Sig Δ	$+$	$-$	$+$

a) On a : * Si $[a > 0\ ;\ -a < b < 3a]\ ou\ [a < 0\ ;\ 3a < b < -a]$

alors f admet une solution unique x=-1 ; $f(x) = a(x+1)\left(x^2 + \frac{b-a}{a}x + 1\right)$

x	$-\infty$ $\quad -1$	$+\infty$
Sig(x+1)	$-$	$+$
Sig Q(x)	$+$	$+$
Sig f(x)	$Sig\ (-a)$	$Sig\ (a)$

b) Si $b = -a$ alors f admet une racine simple x=-1 et une racine double x=1 ;
$f(x) = a(x+1)(x-1)^2$

x	$-\infty$ $\quad$ -1	1	$+\infty$
Sig(x+1)	$-$	$+$	$+$
Sig $(x-1)^2$	$+$	$+$	$+$
Sig f(x)	$Sig\ (-a)$	$Sig\ (a)$	$Sig\ (a)$

c) Si b=3a alors f admet une racine triple x=-1 ; $f(x)=a(x+1)^3$

x	$-\infty$ $\quad$ -1	$+\infty$
Sig(x+1)	$-$	$+$
Sig $(x+1)^3$	$-$	$+$
Sig f(x)	$Sig\ (-a)$	$Sig\ (a)$

d) Si $[a>0\ ;\ b<-a\ \ ou\ \ b>3a]\ ou\ \ [a<0\ \ ;\ \ b<3a\ \ ou\ \ b>-a]$

Alors f admet trois racines distinctes

Démonstration :

$f(x)=ax^3+bx^2+bx+a$

1) $f(-1)=a(-1)^3+b(-1)^2+b(-1)+a=-a+b-b+a=0$ donc -1 est une racine de f
2) $f(x)=(x+1)Q(x)=(x+1)(\alpha x^2+\beta x+\gamma)=\alpha x^3+(\alpha+\beta)x^2+(\beta+\gamma)x+\gamma$ par identification on tire que $\alpha=a\ ;\ \alpha+\beta=b\ ;\ \beta+\gamma=b\ ;\ \gamma=a$ donc $\alpha=\gamma=a\ et\ \beta=b-a$ et par la suite $Q(x)=ax^2+(b-a)x+a$
3) $Q(x)=ax^2+(b-a)x+a$
On a $\Delta=(b-a)^2-4a^2=(b-a-2a)(b-a+2a)=(b-3a)(b+a)$
Etudions le signe de Δ
$\Delta=0$ équivaut $b=3a\ ou\ b=-a$
$Si\ a>0$ on obtient le tableau suivant

b	$-\infty$ $\quad$ $-a$	$3a$	$+\infty$
sig$(b-3a)$	$-$	$-$	$+$
sig$(b+a)$	$-$	$+$	$+$
Sig Δ	$+$	$-$	$+$

$Si\ a<0$ on obtient le tableau suivant

b	$-\infty$ $\quad$ $3a$	$-a$	$+\infty$
sig$(b-3a)$	$-$	$-$	$+$
sig$(b+a)$	$-$	$+$	$+$
Sig Δ	$+$	$-$	$+$

a) Si $[a>0\ ;\ -a<b<3a]\ ou\ \ [a<0\ \ ;\ \ 3a<b<-a]$
On $\Delta<0$ donc Q n'admet pas de solutions et alors f n'admet qu'une solution unique x=-1
et $f(x)=(x+1)Q(x)=a(x+1)\left(x^2+\frac{b-a}{a}x+1\right)=a(x+1)R(x)$

on a $x^2+\frac{b-a}{a}x+1>0$ soit les tableaux de signes de f suivants

Si $a>0$

x	$-\infty \qquad -1$	$+\infty$
Sig(x+1)	$-$	$+$
Sig $R(x)$	$+$	$+$
Sig f(x)	$-$	$+$

Si $a<0$

x	$-\infty \qquad -1$	$+\infty$
Sig(x+1)	$-$	$+$
Sig $R(x)$	$+$	$+$
Sig f(x)	$+$	$-$

Soit donc le tableau récapitulatif

x	$-\infty \qquad -1$	$+\infty$
Sig(x+1)	$-$	$+$
Sig Q(x)	$+$	$+$
Sig f(x)	$Sig\ (-a)$	$Sig\ (a)$

b) Si $b=-a$ alors $Q(x)=ax^2-2ax+a=a(x-1)^2$ et Q admet une racine double x=1 donc $f(x)=a(x+1)(x-1)^2$ alors f admet une racine simple x=-1 et une racine double x=1 et par la suite On obtient le tableau de signe de f

x	$-\infty \qquad -1$	1	$+\infty$
Sig(x+1)	$-$	$+$	$+$
Sig $(x-1)^2$	$+$	$+$	$+$
Sig f(x)	$Sig\ (-a)$	$Sig\ (a)$	$Sig\ (a)$

c) Si b=3a alors $Q(x)=ax^2+2ax+a=a(x+1)^2$ et Q admet une racine double x=-1 donc $f(x)=a(x+1)^3$ alors f admet une racine triple x=-1 On obtient le tableau de signe de f

x	$-\infty \qquad -1$	$+\infty$
Sig(x+1)	$-$	$+$
Sig $(x+1)^3$	$-$	$+$
Sig f(x)	$Sig\ (-a)$	$Sig\ (a)$

d) Si $[a>0\,;\ b<-a\ \ ou\ \ b>3a]\ ou\ \ [a<0\ ;\ \ b<3a\ \ ou\ \ b>-a]$

On a $\Delta>0$ donc Q admet deux racines distinctes $x_1=\frac{a-b-\sqrt{\Delta}}{2a}\ \ et\ \ x_2=\frac{a-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$

Comparons les racines de f

Comparons $x_1\ et-1$: $x_1-(-1)=x_1+1=\frac{(3a-b)-\sqrt{\Delta}}{2a}$

* Si $a>0$

On a $x_1+1=\frac{(3a-b)-\sqrt{\Delta}}{2a}=-\frac{(b-3a)+\sqrt{\Delta}}{2a}<0$ car $b-3a>0\ et\sqrt{\Delta}>0$ et donc $x_1<-1$

* Si $a<0$

On a $x_1+1=\frac{(3a-b)-\sqrt{\Delta}}{2a}$ comparons $(3a-b)\ et\ \sqrt{\Delta}$ revient à comparer $(3a-b)^{\ 2} et\ \Delta$

$(3a-b)^{\ 2}-\ \Delta=(3a-b)^{\ 2}-(b-3a)(b+a)=(3a-b)^{\ 2}+(3a-b)(b+a)$

$=(3a-b)(3a-b+b+a)=4a(3a-b)<0$ donc $(3a-b)^{\ 2}<\ \Delta$

et par la suite $(3a-b)\ <\ \sqrt{\Delta}$ et donc $x_1<-1$

Comparons $x_2\ et-1$ par un calcul analogue on trouvera que $x_2\ >-1$

Donc on tire $x_1<-1<x_2$ et $f(x)=a(x+1)(x-x_1)(x-x_2)$ admet trois racines

distinctes soit alors le tableau de signe de f

x	$-\infty$ $\quad x_1$	$x_1 \quad -1$	$-1 \quad x_2$	$x_2 \quad +\infty$
sig$(x+1)$	$-$	$-$	$+$	$+$
sig$(x-x_1)$	$-$	$+$	$+$	$+$
sig$(x-x_2)$	$-$	$-$	$-$	$+$
sig$f(x)$	$sig(-a)$	$sig(a)$	$sig(-a)$	$sig(a)$

Exemple :

Résoudre l'équation $f(x) = 2x^3 + 5x^2 + 5x + 2 = 0$ et précizer le signe de f

On a $x = -1$ est une racine de f en effet $f(-1) = 2(-1)^3 + 5(-1)^2 + 5(-1) + 2 = -2 + 5 - 5 + 2 = -7 + 7 = 0$

Il existe un polynôme de degré 2 Q(x) tel que $f(x) = (x+1)Q(x)$ où $Q(x) = 2x^2 + 3x + 2$

Or $Q(x) = 0$ soit $\Delta = 3^2 - 4 \times 2 \times 2 = 9 - 16 = -7 < 0$ on obtient la factorisation de f

$f(x) = 2(x+1)(x^2 + \frac{3}{2}x + 1)$ et on tire le tableau de signe suivant

x	$-\infty \quad -1$	$-1 \quad +\infty$
Sig(x+1)	$-$	$+$
Sig $(x^2 + \frac{3}{2}x + 1)$	$+$	$+$
Sig f(x)	$-$	$+$

4 – Fonction rationnelles

> Soit f et g deux fonctions polynômes
>
> La fonction $h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est appelée fonction rationnelle
>
> $$x \longmapsto \frac{f(x)}{g(x)}$$

Exemple :

Soit $f(x) = \frac{x^2+5x-6}{x^2+x-2}$

1) Le domaine de définition de f : f n'a un sens que si et seulement si $x^2 + x - 2 \neq 0$

$x^2 + x - 2 = 0$ on a 1+1-2=0 alors $x_1 = 1 \ et \ x_2 = -2$ donc f est définie pour tout $\mathbb{R}\backslash\{-2,1\}$

et $x^2 + x - 2 = (x-1)(x+2)$

2) Factorisons $x^2 + 5x - 6 = 0$ on a 1+5+(-6)=0 alors $x_1 = 1 \ et \ x_2 = -6$
   $x^2 + 5x - 6 = (x-1)(x+6)$
3) Simplifions $f(x) = \frac{x^2+5x-6}{x^2+x-2} = \frac{(x-1)(x+6)}{(x-1)(x+2)} = \frac{(x+6)}{(x+2)}$
4) Etudions le signe de f

x	$-\infty \quad -6$	$-6 \quad -2$	$-2 \quad +\infty$
Sig$(x+6)$	$-$	$+$	$+$
Sig $(x+2)$	$-$	$-$	$+$
Sig $f(x)$	$+$	$-$	$+$