

Chapitre 6 Trigonométrie et mesure de grandeurs

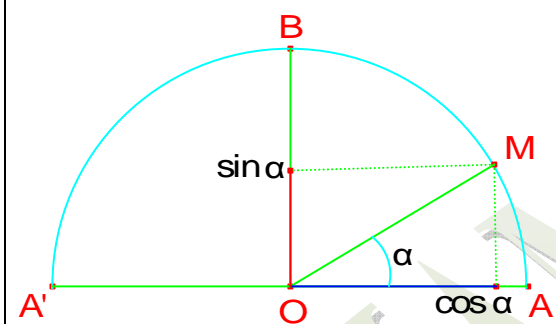
I – Définitions :

1 - Cosinus et Sinus

Soit $(O, \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$ un repère orthonormé du plan. Soit α un réel appartenant à $[0, \pi]$ et M l'unique point du demi cercle trigonométrique (C) tel que $\widehat{AOM} = \alpha$

On appelle cosinus du réel α , l'abscisse du point M et on le note $\cos \alpha$

On appelle sinus du réel α , l'ordonnée du point M et on le note $\sin \alpha$



2- Tangente et Cotangente

* Soit α un réel appartenant à $[0, \pi]$ et tel que $\alpha > \frac{\pi}{2}$

On appelle tangente du réel α le réel noté $\tan \alpha$ et défini par $\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$

* Soit α un réel appartenant à $]0, \pi[$

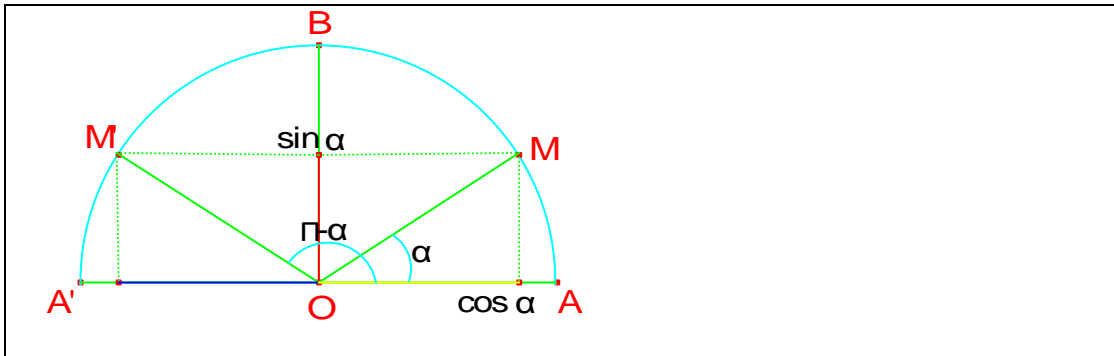
On appelle cotangente du réel α le réel noté $\cot \alpha$ et défini par $\cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$

II – Angles supplémentaires

Pour tout α appartenant à $[0, \pi]$ on a $\cos(\pi - \alpha) = -\cos \alpha$ et $\sin(\pi - \alpha) = \sin \alpha$

Pour tout α appartenant à $[0, \pi]$ tel que $\alpha \neq \frac{\pi}{2}$ on a $\tan(\pi - \alpha) = -\tan \alpha$

Pour tout α appartenant à $]0, \pi[$ on a $\cot(\pi - \alpha) = -\cot \alpha$



Explications :

On a M et M' sont symétriques par rapport à (OB) donc $\widehat{M'OA'} = \alpha$ d'où $\widehat{AOM'} = \pi - \alpha$

Or dans le repère orthonormé $(O, \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$ M et M' ont des abscisses opposées et une même ordonnée ce qui entraîne $\cos(\pi - \alpha) = -\cos\alpha$ et $\sin(\pi - \alpha) = \sin\alpha$

$$\tan(\pi - \alpha) = \frac{\sin(\pi - \alpha)}{\cos(\pi - \alpha)} = \frac{\sin\alpha}{-\cos\alpha} = -\tan\alpha \text{ avec } \alpha \in [0, \pi] \text{ et } \alpha \neq \frac{\pi}{2} \text{ car } \cos\frac{\pi}{2} = 0$$

$$\cot(\pi - \alpha) = \frac{\cos(\pi - \alpha)}{\sin(\pi - \alpha)} = \frac{-\cos\alpha}{\sin\alpha} = -\cot\alpha \text{ avec } \alpha \in]0, \pi[\text{ car } \sin 0 = 0 \text{ et } \sin\pi = 0$$

Exemples :

Calculer sans utiliser la calculatrice

a) $\cos\frac{\pi}{12} + \cos\frac{5\pi}{12} + \cos\frac{7\pi}{12} + \cos\frac{11\pi}{12}$

b) $\sin\frac{\pi}{12} + \sin\frac{5\pi}{12} - \sin\frac{7\pi}{12} - \sin\frac{11\pi}{12}$

Réponse :

On a $\frac{\pi}{12} + \frac{11\pi}{12} = \frac{5\pi}{12} + \frac{7\pi}{12} = \pi$ donc les angles sont supplémentaires alors on a :

a) $\cos\frac{11\pi}{12} = -\cos\frac{\pi}{12}$ et $\cos\frac{7\pi}{12} = -\cos\frac{5\pi}{12}$ d'où on obtient

$$\cos\frac{\pi}{12} + \cos\frac{5\pi}{12} + \cos\frac{7\pi}{12} + \cos\frac{11\pi}{12} = \cos\frac{\pi}{12} + \cos\frac{5\pi}{12} - \cos\frac{5\pi}{12} - \cos\frac{\pi}{12} = 0$$

a) $\sin\frac{11\pi}{12} = \sin\frac{\pi}{12}$ et $\sin\frac{7\pi}{12} = \sin\frac{5\pi}{12}$ d'où on obtient

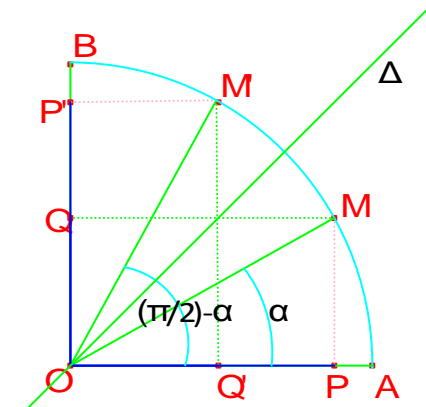
$$\sin\frac{\pi}{12} + \sin\frac{5\pi}{12} - \sin\frac{7\pi}{12} - \sin\frac{11\pi}{12} = \sin\frac{\pi}{12} + \sin\frac{5\pi}{12} - \sin\frac{5\pi}{12} - \sin\frac{\pi}{12} = 0$$

III – Angles complémentaires

Pour tout α appartenant à $[0, \frac{\pi}{2}]$ on a $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin\alpha$ et $\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos\alpha$

Pour tout α appartenant à $]0, \frac{\pi}{2}[$ on a $\tan\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cot\alpha$

Pour tout α appartenant à $[0, \frac{\pi}{2}[$ on a $\cot\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \tan\alpha$



Explications :

On considère la droite Δ la bissectrice de \widehat{AOB} et les angles $\widehat{AOM} = \widehat{M'OB} = \alpha$ et on a les points A et B sont symétriques par rapport à Δ donc on tire que $\widehat{AOM'} = \frac{\pi}{2} - \alpha$ et que M et M' sont symétriques par rapport à Δ

Soit P le projeté orthogonal de M sur (OA) et Q le projeté orthogonal de M sur (OB)

Soit P' le projeté orthogonal de M sur (OB) et Q' le projeté orthogonal de M sur (OA)

Donc P' et Q' sont respectivement les symétriques de P et Q par rapport à Δ

On obtient $\overline{OP} = \overline{OP'}$ et $\overline{OQ} = \overline{OQ'}$ or $\overline{OP} = \cos\alpha$; $\overline{OP'} = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$; $\overline{OQ} = \sin\alpha$ et

$$\overline{OQ'} = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$$

Donc on obtient : $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin\alpha$ et $\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos\alpha$

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)} = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \cot\alpha ; \text{ avec } \alpha \neq 0 \text{ car } \cos\frac{\pi}{2} = 0$$

$$\cot\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \tan\alpha ; \alpha \neq \frac{\pi}{2} \text{ car } \sin\frac{\pi}{2} = 1$$

Exemples :

Sans utiliser la calculatrice calculer

$$\cos\frac{\pi}{12} + \cos\frac{5\pi}{12} - \sin\frac{\pi}{12} - \sin\frac{5\pi}{12}$$

On a : $\frac{\pi}{12} + \frac{5\pi}{12} = \frac{\pi}{2}$ donc les angles sont complémentaires alors

$$\cos \frac{5\pi}{12} = \sin \frac{\pi}{12} \text{ et } \sin \frac{5\pi}{12} = \cos \frac{\pi}{12} \text{ donc}$$

$$\cos \frac{\pi}{12} + \cos \frac{5\pi}{12} - \sin \frac{\pi}{12} - \sin \frac{5\pi}{12} = \cos \frac{\pi}{12} + \sin \frac{\pi}{12} - \sin \frac{\pi}{12} - \cos \frac{\pi}{12} = 0$$

IV – Relations fondamentales

Pour tout α appartenant à $[0, \pi]$ on a $\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1$

Pour tout α appartenant à $[0, \pi]$ tel que $\alpha \neq \frac{\pi}{2}$ on a $1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$

Pour tout α appartenant à $]0, \pi[$ on a $1 + \cot^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}$

Explications :

- $(O, \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$ le repère orthonormé du plan, on a $OM = 1$ et le point P étant le projeté orthogonal de M sur (OA) et Q le projeté orthogonal de M sur (OB), on considère le triangle OMP rectangle en P d'après le théorème de Pythagore on a $OM^2 = OP^2 + MP^2$ or $MP^2 = OQ^2$ et on a $\overline{OP} = \cos \alpha$ et $\overline{OQ} = \sin \alpha$, donc on obtient $\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1$ avec $\alpha \in [0, \pi]$
- $1 + \tan^2 \alpha = 1 + \frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} = \frac{\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$ avec $\alpha \in [0, \pi]$ et $\alpha \neq \frac{\pi}{2}$ car $\cos \frac{\pi}{2} = 0$
- $1 + \cot^2 \alpha = 1 + \frac{\cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha} = \frac{\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha}{\sin^2 \alpha} = \frac{1}{\sin^2 \alpha}$ avec $\alpha \in]0, \pi[$ et $\alpha \neq \frac{\pi}{2}$ car $\sin 0 = 0$ et $\sin \pi = 0$

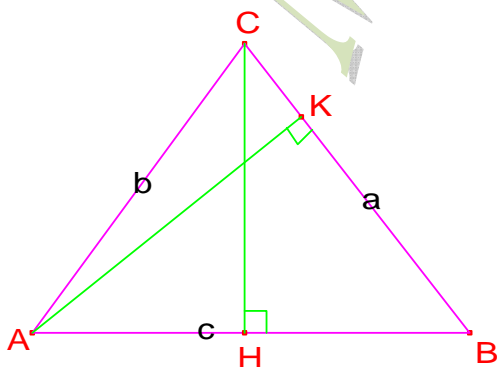
V – La loi du sinus et L'aire d'un triangle

1 - La loi du sinus

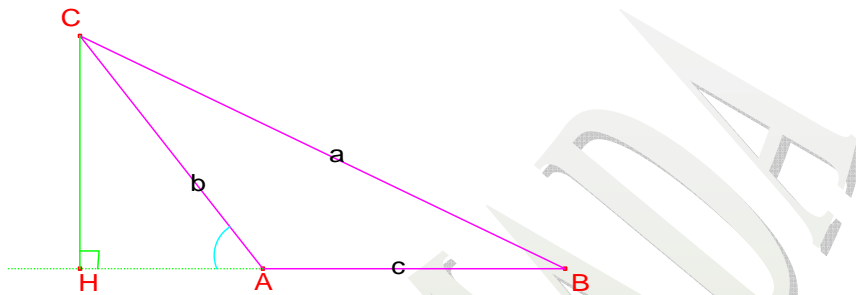
Soit ABC un triangle on pose $a = BC, b = AC$ et $c = AB$

$$\text{On a } \frac{a}{\sin \hat{A}} = \frac{b}{\sin \hat{B}} = \frac{c}{\sin \hat{C}}$$

Démonstration :



- On considère le triangle ACH rectangle en H, d'après le théorème de Pythagore on a : $\sin \hat{A} = \frac{CH}{AC} = \frac{CH}{b}$ on obtient $CH = b \cdot \sin \hat{A}$ (1)
- On considère le triangle BCH rectangle en H, d'après le théorème de Pythagore on a : $\sin \hat{B} = \frac{CH}{BC} = \frac{CH}{a}$ on obtient $CH = a \cdot \sin \hat{B}$ (2)
- D'après (1) et (2) on obtient $b \cdot \sin \hat{A} = a \cdot \sin \hat{B}$ soit donc $\frac{a}{\sin \hat{A}} = \frac{b}{\sin \hat{B}}$
- Par un travail analogue que précédemment dans les triangles AKC et ABK on tire que $\frac{c}{\sin \hat{C}} = \frac{b}{\sin \hat{B}}$ d'où $\frac{a}{\sin \hat{A}} = \frac{b}{\sin \hat{B}} = \frac{c}{\sin \hat{C}}$



Etudier le cas où la hauteur CH est extérieure au triangle ABC (voir figure ci-dessus)

2 – Aire d'un triangle

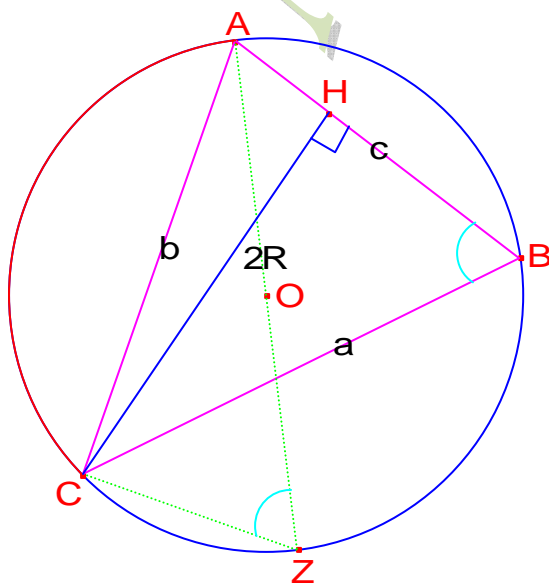
Soit ABC un triangle on pose $a = BC, b = AC$ et $c = AB$

S désigne l'aire du triangle ABC et R le rayon du cercle circonscrit à ABC.

$$\text{On a : } S = \frac{1}{2} ab \sin \hat{C} = \frac{1}{2} bc \sin \hat{A} = \frac{1}{2} ac \sin \hat{B}$$

$$\frac{a}{\sin \hat{A}} = \frac{b}{\sin \hat{B}} = \frac{c}{\sin \hat{C}} = 2R = \frac{abc}{2S}$$

Démonstration :



On a Z et B se trouvent sur le même arc donc \widehat{ABC} et \widehat{AZC} interceptent le même arc $[\widehat{AC}]$ donc \hat{B} et \hat{Z} sont égaux, donc $\sin \hat{Z} = \sin \hat{B}$

Le triangle ACZ est rectangle en C car $[AZ]$ est un diamètre du cercle circonscrit donc

$$AZ = \frac{AC}{\sin \hat{Z}} \text{ c'est-à-dire } 2R = \frac{b}{\sin \hat{B}}$$

Par un raisonnement similaire, on obtient ainsi $2R = \frac{a}{\sin \hat{A}} = \frac{c}{\sin \hat{C}}$

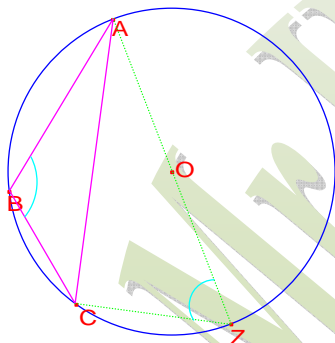
$$\text{Donc } 2R = \frac{a}{\sin \hat{A}} = \frac{b}{\sin \hat{B}} = \frac{c}{\sin \hat{C}}$$

Or on l'aire d'un triangle est donnée par la formule suivante : $S = \frac{1}{2} \times (CH \times AB)$ ce qui donne $S = \frac{1}{2} a c \cdot \sin \hat{B}$ car $CH = a \cdot \sin \hat{B}$

Par un travail similaire on tire que $S = \frac{1}{2} a c \cdot \sin \hat{B} = \frac{1}{2} b c \cdot \sin \hat{A} = \frac{1}{2} a b \cdot \sin \hat{C}$

$$\text{Soit } 2S = \frac{ab c \cdot \sin \hat{B}}{b} = \frac{ab c \cdot \sin \hat{A}}{a} = \frac{a b c \cdot \sin \hat{C}}{c} \text{ ce qui entraîne } \frac{2S}{abc} = \frac{\sin \hat{B}}{b} = \frac{\sin \hat{A}}{a} = \frac{\sin \hat{C}}{c}$$

$$\text{D'où le résultat } \frac{2S}{abc} = \frac{b}{\sin \hat{B}} = \frac{a}{\sin \hat{A}} = \frac{c}{\sin \hat{C}} = 2R$$



Etudier le cas de figure où le triangle ABC possède un angle obtus (remarque : \hat{B} et \hat{Z} sont supplémentaires)

VI- Théorème d'EL-Kashi

Soit ABC un triangle on pose $a = BC, b = AC$ et $c = AB$; on a

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos \hat{A}$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos \hat{B}$$

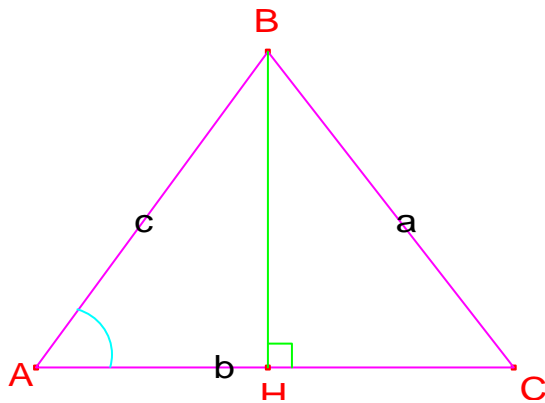
$$c^2 = b^2 + a^2 - 2ba \cdot \cos \hat{C}$$

Démonstration :

Le théorème de Pythagore dans le triangle BHC donne : $BC^2 = BH^2 + CH^2$

Le théorème de Pythagore dans le triangle BAH donne : $BH^2 = AB^2 - AH^2$

On obtient $BC^2 = AB^2 - AH^2 + CH^2$; or $HC = AC - AH$ ce qui donne



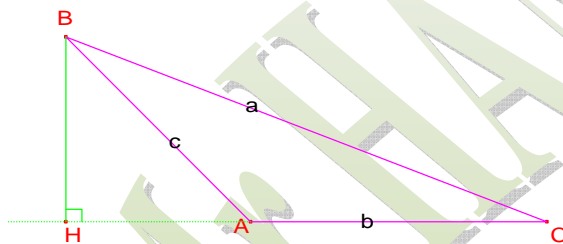
$$HC^2 = (AC - AH)^2 = AC^2 + AH^2 - 2 \times AC \times AH \text{ ce qui donne pour } BC^2$$

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2 \times AC \times AH \text{ Or } AH = AB \times \cos \hat{A} \text{ donc on obtient}$$

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2 \times AC \times AB \times \cos \hat{A} \text{ ce qui donne finalement}$$

$$a^2 = c^2 + b^2 - 2bc \cdot \cos \hat{A}$$

Par un raisonnement similaire on obtient les deux autres formules



Etudier le cas où la hauteur BH est extérieure au triangle ABC (voir figure ci-dessus)

VII – Triangles isométriques

1^{er} cas d'isométrie : Si deux triangles ont un côté compris entre deux angles respectivement égaux alors ils sont isométriques

2^{ème} cas d'isométrie : Si deux triangles ont un angle compris entre deux côtés respectivement égaux alors ils sont isométriques

3^{ème} cas d'isométrie : Si deux triangles ont trois côtés respectivement égaux alors ils sont isométriques

Démonstration :

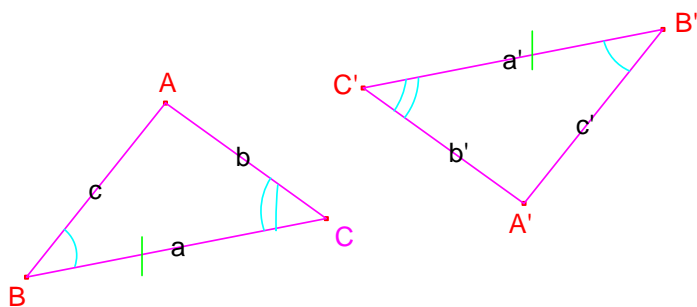
1^{er} cas d'isométrie :

Dans les triangles ABC et A'B'C' ont $BC = B'C'$, $\hat{B} = \hat{B}'$ et $\hat{C} = \hat{C}'$

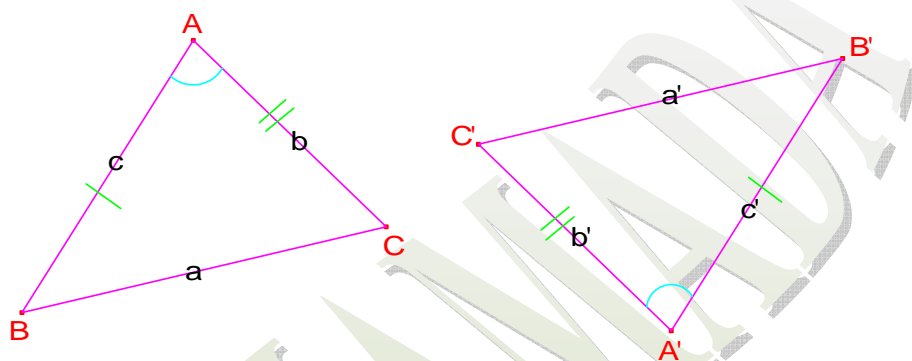
$\widehat{B} = \widehat{B'}$ et $\widehat{C} = \widehat{C'}$, On sait que la somme des angles d'un triangle est égale à π donc on en déduit que $\widehat{A} = \widehat{A'}$ ce qui donne $\sin \widehat{B} = \sin \widehat{B'}$ et $\sin \widehat{C} = \sin \widehat{C'}$ et $\sin \widehat{A} = \sin \widehat{A'}$

et comme $BC = B'C'$ c.à.d. $a=a'$ on en déduit que $\frac{a}{\sin \widehat{A}} = \frac{a'}{\sin \widehat{A'}}$ soit donc deux à deux on a

$\frac{b}{\sin \widehat{B}} = \frac{b'}{\sin \widehat{B'}}$ et $\frac{c}{\sin \widehat{C}} = \frac{c'}{\sin \widehat{C'}}$ ce qui entraîne que $b = b'$ et $c = c'$ donc dans les deux triangles ABC et A'B'C' les cotés et les angles sont égaux respectivement deux à deux
Donc ils sont isométriques



2ème cas d'isométrie :



On a :

$AB = A'B'$, $AC = A'C'$ et $\widehat{A} = \widehat{A'}$ donc $b = b'$, $c = c'$, $\sin \widehat{A} = \sin \widehat{A'}$ et $\cos \widehat{A} = \cos \widehat{A'}$

Donc on tire que $b^2 = (b')^2$, $c^2 = (c')^2$ et $2bc \cdot \cos \widehat{A} = 2b'c' \cdot \cos \widehat{A'}$

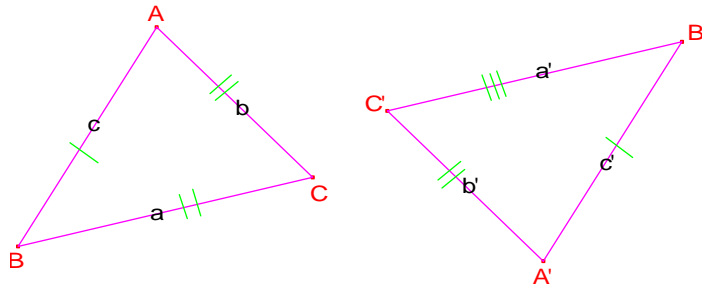
Donc d'après le théorème d'El-Kashi on obtient $a^2 = (a')^2$ soit $a = a'$ c.à.d. $BC = B'C'$

Et d'après la loi des sinus on obtient $\frac{a}{\sin \widehat{A}} = \frac{a'}{\sin \widehat{A'}}$ et $\frac{b}{\sin \widehat{B}} = \frac{b'}{\sin \widehat{B'}}$ et $\frac{c}{\sin \widehat{C}} = \frac{c'}{\sin \widehat{C'}}$ ce qui donne $\sin \widehat{B} = \sin \widehat{B'}$ et $\sin \widehat{C} = \sin \widehat{C'}$ donc $\widehat{B} = \widehat{B'}$ et $\widehat{C} = \widehat{C'}$

donc dans les deux triangles ABC et A'B'C' les cotés et les angles sont égaux respectivement deux à deux, donc ils sont isométriques

3ème cas d'isométrie :

On a : $AB = A'B'$, $AC = A'C'$ et $BC = B'C'$



Donc $a = a'$, $b = b'$ et $c = c'$ or d'après le théorème d'El-Kashi on a

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos \hat{A}$ et $(a')^2 = (b')^2 + (c')^2 - 2b'c' \cdot \cos \hat{A}$ ce qui donne que

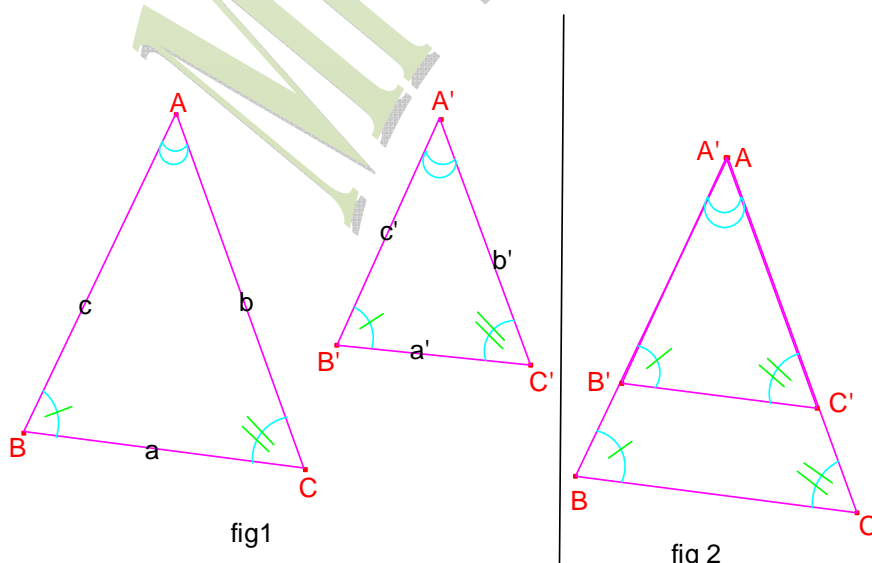
$\cos \hat{A} = \cos \hat{A}'$ donc $\hat{A} = \hat{A}'$ et par un raisonnement analogue on tire $\hat{B} = \hat{B}'$ et $\hat{C} = \hat{C}'$

donc dans les deux triangles ABC et A'B'C' les cotés et les angles sont égaux respectivement deux à deux, donc ils sont isométriques

VIII – Triangles semblables

- Soit ABC et A'B'C' deux triangles, on pose $BC = a$, $AB = c$ et $AC = b$ et $B'C' = a'$, $A'B' = c'$ et $A'C' = b'$
on dit qu'ils sont semblables si et seulement si $\hat{A} = \hat{A}'$, $\hat{B} = \hat{B}'$ et $\hat{C} = \hat{C}'$
- Soit ABC et A'B'C' deux triangles semblables alors on a $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$ (rapport de similitude des deux triangles)
- Soit ABC et A'B'C' deux triangles tel que $\hat{A} = \hat{A}'$ et $\frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$ alors ABC et A'B'C' sont semblables
- Soit ABC et A'B'C' deux triangles tel que $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$ alors ABC et A'B'C' sont semblables

Démonstration :



ABC et A'B'C' sont semblables donc on a $\hat{A} = \hat{A}'$, $\hat{B} = \hat{B}'$ et $\hat{C} = \hat{C}'$ et tel qu'on suppose que $A'B' < AB$ (réduction) c.à.d. que $a' < a$, $b' < b$ et $c' < c$ (voir fig 1)

En mettant les deux triangles l'un sur l'autre (fig 2) les cotés [AB] et [A'B'] et [AC] et [A'C'] se superposent car on a $\hat{A} = \hat{A}'$ et $(BC) \parallel (B'C')$ car $\hat{B} = \hat{B}'$ deux angles correspondants donc d'après le théorème de Thalès on a : $\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{BC}{B'C'}$ soit $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$ (rapport de similitude des deux triangles)

VIII – Relations métriques dans le triangle rectangle

Soit ABC un triangle rectangle en A et soit H le pied de la hauteur issue de A, on a :

$$BC^2 = AB^2 + AC^2$$

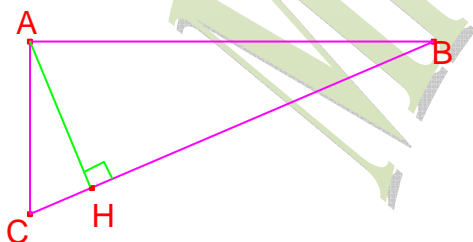
$$AH \cdot BC = AB \cdot AC$$

$$AH^2 = HB \cdot HC$$

$$AB^2 = BH \cdot BC$$

$$AC^2 = CH \cdot BC$$

Démonstration :



- **Théorème de Pythagore** — Dans un **triangle rectangle**, le carré de l'**hypoténuse** est égal à la somme des carrés des longueurs des côtés de l'angle droit. Donc $BC^2 = AB^2 + AC^2$

- l'aire du triangle ABC est donnée de 2 relations égales : $\frac{AB \times AC}{2} = \frac{AH \times BC}{2}$ soit donc $AB \times AC = AH \times BC$
- dans les triangles rectangles ABC, AHB et AHC d'après le théorème de Pythagore on a respectivement: $BC^2 = AB^2 + AC^2$, $AB^2 = AH^2 + BH^2$, $AC^2 = AH^2 + CH^2$ on tire donc $BC^2 = 2AH^2 + BH^2 + CH^2$ or $BC = BH + CH$ et $BC^2 = BH^2 + CH^2 + 2BH \cdot CH$ d'où le résultat $AH^2 = HB \cdot HC$
- dans le triangle rectangle ABC d'après Pythagore on a : $AB^2 = BC^2 - AC^2$ or $BC^2 = BH^2 + CH^2 + 2BH \cdot CH$, $AC^2 = AH^2 + CH^2$ et $AH^2 = HB \cdot HC$ on obtient donc $AB^2 = BH^2 + CH^2 + 2BH \cdot CH - AH^2 - CH^2 = BH^2 + BH \times CH = BH \times (BH + CH)$ soit $AB^2 = BH \times BC$

II - Lignes trigonométriques des angles remarquables

α	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
$\sin \alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0
$\cos \alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1
$\tan \alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	/	0
$\cot \alpha$	/	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	/

MR HAMADA