

Chapitre 7**Suites géométriques****I – Définition**

On dit qu'une suite (U_n) est géométrique, s'il existe un réel q tel que pour tout entier naturel n on a $U_{n+1} = q U_n$

Le réel q est appelé raison de cette suite

Remarque : Si $a, b, c, d \dots$ sont des termes consécutifs d'une suite géométrique, on dit qu'ils sont en progression géométrique.

Exemple : Un client d'une banque paye chaque mois 0,2% de plus que le montant payé le mois précédent

$$\text{on a } U_{n+1} = U_n + 0,2\% U_n \text{ soit } U_{n+1} = \frac{1002}{1000} U_n$$

II – Terme général d'une suite géométrique

Soit (U_n) une suite géométrique de premier terme U_0 et de raison $q \neq 0$

On a : $U_n = q^n U_0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$U_n = q^{n-p} U_p \text{ pour tout } n \text{ et } p \in \mathbb{N}$$

Démonstration :

(U_n) une suite géométrique de premier terme U_0 et de raison $q \neq 0$

C

$$U_{n-1} = q U_{n-2}$$

· ·

· ·

· ·

$$U_1 = q U_0$$

$$U_n = q q \dots q U_0 = q^n U_0$$

Cas particuliers :

- Si $q = 1$ on a $U_n = U_{n-1} = \dots = U_0$ c'est une suite constante
- Si $U_0 = 0$ on aura $U_n = q^n U_0 = q^n 0 = 0$ c'est une suite nulle
- Si $q = 0$ on a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ $q^n = 0$ donc $U_n = 0$ c'est une suite nulle

Exemple : Soit (U_n) une suite de nombres réels non nuls, telle que $U_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$ $\frac{U_{n+1}}{U_n} = \sqrt{3}$. Donner le terme général de la suite (U_n)

(U_n) est une suite géométrique de premier terme $U_0 = 1$ et de raison $q = \frac{U_{n+1}}{U_n} = \sqrt{3}$

donc $U_n = q^n U_0 = (\sqrt{3})^n \times 1 = (\sqrt{3})^n$

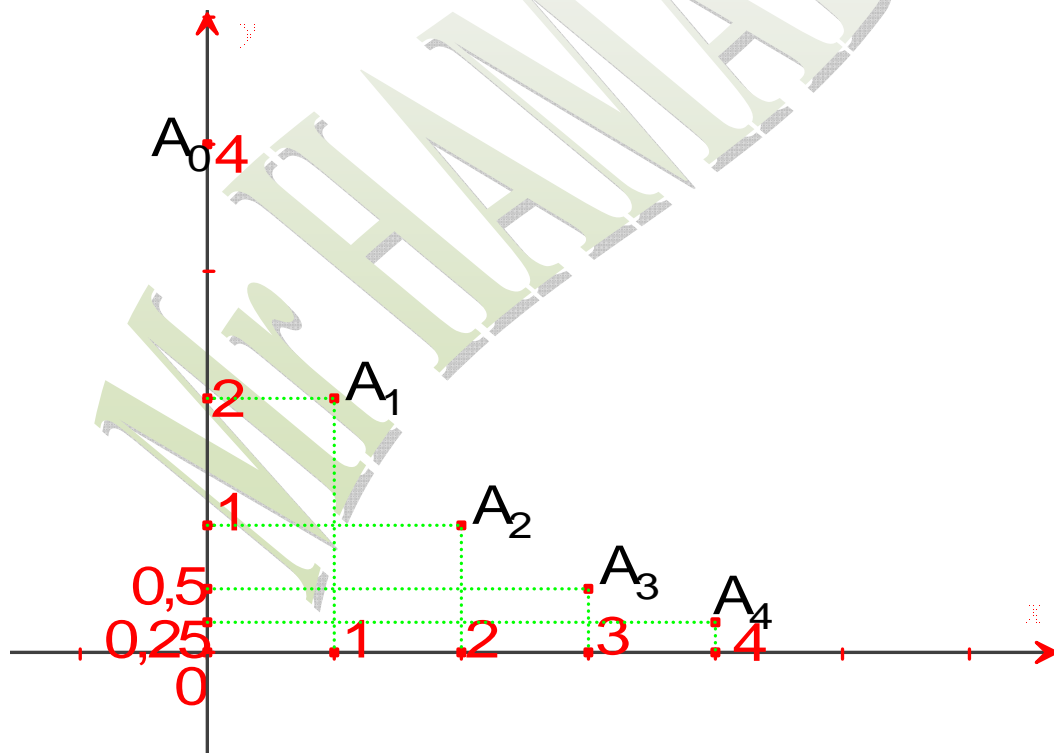
III – Représentation graphique

Soit (O, \vec{i}, \vec{j}) un repère orthonormé, on considère la suite (U_n) , suite géométrique de 1^{er} terme $U_0 = 4$ et de terme générale $U_{n+1} = \frac{1}{2}U_n$

On a $U_0 = 4, U_1 = 2, U_2 = 1, U_3 = \frac{1}{2}, U_4 = \frac{1}{4} \dots$

On considère les points $A_0(0,4), A_1(1,2), A_2(2,1), A_3(3, \frac{1}{2}), A_4(4, \frac{1}{4})$

Soit la représentation graphique de la suite géométrique (U_n) dans le repère (O, \vec{i}, \vec{j})



IV – Somme des termes consécutifs d'une suite géométrique

La somme S de n termes consécutifs d'une suite géométrique de raison q ($q \neq 1$) est

$$S = a \times \frac{1-q^n}{1-q}, \text{ où } a \text{ est le premier terme de cette somme}$$

Si $q = 1$ alors $S = na$

On a $1 + q + q^2 + \dots + q^n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$, où q est un réel différent de 1 et n un entier naturel

Si $q = 1$ on a $1 + q + q^2 + \dots + q^n = n + 1$

Exemple :

Soit (U_n) une suite géométrique de 1^{er} terme $U_1 = -5$ et de raison $q = \frac{1}{2}$

Calculer la somme des 8 premiers termes de cette suite

$$\text{On a } S = U_1 + U_2 + \dots + U_8 = (-5) \times \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^8}{1 - \frac{1}{2}} = (-5) \times \frac{2^8 - 1}{2^7} = -\frac{1275}{128}$$