

COURS FONCTIONS 2SC

M. Y. BOULILA

Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) (unité: 1 cm , sauf précision contraire)

I) Introduction:

1) Exercice: 1) Compléter le tableau de valeurs:

x	- 2	- 1	0	1	2
- 2x + 1					
$x^5 - 5x^3 + 2x + 1$					

2)a) Construire dans le même repère (O, \vec{i}, \vec{j}) les graphes des fonctions:

$$f(x) = - 2x + 1 \quad \text{et} \quad g(x) = x^5 - 5x^3 + 2x + 1$$

b) Calculer $f(3)$ et $g(3)$, conclusion ?

2) Conclusion: En **Mathématiques** , pour construire correctement le graphe d'une fonction,

II) Sens de variation d'une fonction sur un intervalle I , où elle est définie :

1) Exercice: Soient les fonctions: $f(x) = \frac{x-3}{x-2}$ et $g(x) = \frac{x+3}{x-2}$

1)a) Déterminer les deux intervalles I et I' , sur lesquels f est définie (de même pour g)

b)i) Démontrer que pour tous réels: a et b de I

Si $a < b$

Alors $f(a) < f(b)$ et $g(a) > g(b)$

ii) Que peut-on démontrer si a et b sont deux réels de I' tels que: $a < b$?

iii) Dresser le tableau de variation de f et g sur **R**

Vocabulaire: « La fonction f est sur »
 « La fonction f est sur »
 « La fonction g est sur »
 « La fonction g est sur »

c)i) Démontrer que pour tous réels: a et b de I ($a \neq b$)

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \frac{f(a) - f(b)}{a - b} > 0 \quad \text{et} \quad \frac{g(b) - g(a)}{b - a} = \frac{g(a) - g(b)}{a - b} < 0$$

ii) Que peut-on démontrer si a et b sont deux réels de I' ?

iii) Interpréter graphiquement le 1)c)i) . Remarque ?

2) Taux d'accroissement d'une fonction. Dans toute la suite on supposera que: $a \neq b$

a) Définition: I est un intervalle sur lequel la fonction f est définie ($I \subset D_f$)

Pour tous réels a et b de I ,

on appelle taux d'accroissement de f entre a et b , le réel noté: $\tau_{(a,b)}$ défini par:

$$\tau_{(a,b)} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

b) Interprétation géométrique: Soit f une fonction définie sur I

Les points $A(a; f(a))$ et $B(b; f(b))$ sont des points

$$\tau_{(a,b)} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \text{ est}$$

c) Propriétés: i) Si f est croissante sur I

Alors: pour tous réels a et b de I : *) si $a < b$ alors:

*) si $a > b$ alors:

$$\text{Alors: pour tous réels } a \text{ et } b \text{ de } I : \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

ii) Si pour tous réels a et b de I : $\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$

Alors: pour tous réels a et b de I : *) si $a < b$ alors

*) si $a > b$ alors

Alors:

On retiendra:

f est une fonction définie sur un intervalle I de \mathbf{R}

$$f \text{ est croissante sur } I \Leftrightarrow \text{Pour tous réels } a \text{ et } b \text{ de } I : \tau_{(a,b)} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

$$f \text{ est décroissante sur } I \Leftrightarrow \text{Pour tous réels } a \text{ et } b \text{ de } I : \tau_{(a,b)} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

d) Exercice: $m \neq 0$; p ; $k \neq 0$; $\alpha \neq 0$; β ; γ , sont des paramètres réels

1)a) Déterminer D_f , le domaine de définition de f

b) (a et b appartenant à un même intervalle inclus dans D_f)

Déterminer l'expression en fonction de a et b ,

du taux d'accroissement de f entre a et b

2) Dédire de 1) le tableau de variation des fonctions:

i) $f(x) = 2x + p$

ii) $f(x) = -3x + p$

iii) $f(x) = mx + p$

iv) $f(x) = 3x^2$

v) $f(x) = -2x^2$

vi) $f(x) = kx^2$

vii) $f(x) = \frac{k}{x}$

viii) $f(x) = \frac{k}{x-3}$

ix) $f(x) = \frac{k}{mx+p}$

x) $f(x) = x^2 + 2x - 3$

xi) $f(x) = -3x^2 + 4x - 5$

xii) $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$

e) Notion de: « nombre dérivé » d'une fonction f en a (a est un réel de I)

1) Exemple: $f(x) = x^2$

i) On fixe $a = 1$, $\tau_{(1,b)} =$ _____
 $\tau_{(1,b)}$ est le _____ de la droite (AB) avec A(;) et B(;)

Par exemple avec: $b = 2$; $b = 1,5$; $b = 0$; $b = 0,5$

ii) On donne à b des valeurs « de plus en plus proches » de $a = 1$
Les droites (AB) tendent vers la _____
 $\tau_{(1,b)}$ prend alors des valeurs « de plus en plus proches de » _____
qui est le coefficient directeur de _____

iii) Vocabulaire: 2 est appelé _____

2) Exemple: $f(x) = x^5 - 5x^3 + 2x + 1$

a)i) On fixe $a = 0$, $\tau_{(0,b)} =$ _____
 $\tau_{(0,b)}$ est le _____ de la droite (AB), avec A(;) et B(;)

Par exemple avec: $b = 1$; $b = 0,5$

ii) On donne à b des valeurs « de plus en plus proches » de $a = 0$
Les droites (AB) tendent vers la _____
 $\tau_{(0,b)}$ prend alors des valeurs de plus en plus proches de _____, qui est le coefficient directeur de _____
Vérification avec une calculatrice graphique

iii) Vocabulaire: 2 est appelé _____

b)i) On fixe $a = 1$, $\tau_{(1,b)} =$ _____
 $\tau_{(1,b)}$ est le _____ de la droite (AB), avec A(;) et B(;)

Par exemple avec: $b = 0$; $b = 2$

ii) On donne à b des valeurs « de plus en plus proches » de $a = 1$
Les droites (AB) tendent vers la _____
 $\tau_{(1,b)}$ prend alors des valeurs de plus en plus proches de _____, qui est le coefficient directeur de _____
Vérification avec une calculatrice graphique

iii) Vocabulaire: -8 est appelé _____

III) Autres exemples de fonctions :

A) Fonctions du type: $f(x) = \sqrt{\alpha x + \beta}$ ($\alpha ; \beta$) $\in \mathbf{R}^* \times \mathbf{R}$:

1) Tableau de variation de $f(x) = \sqrt{\alpha x + \beta}$ ($\alpha ; \beta$) $\in \mathbf{R}^* \times \mathbf{R}$:

a) Exemples: 1) $f(x) = \sqrt{2x - 7}$

a) Pour quelles valeurs de x peut-on calculer $f(x)$?

On dit que f est définie pour tous les réels
 On dit que le domaine de définition de f est: $D_f =$
 b) Pour tous réels a et b de D_f : $\tau_{(a; b)} =$

$$\tau_{(a; b)} =$$

c) Dresser le tableau de variation de f

2) $f(x) = \sqrt{-3x+1}$

Mêmes questions que ci-dessus

2) Cas général : $f(x) = \sqrt{\alpha x + \beta}$

a) Domaine de définition : $f(x) = \sqrt{\alpha x + \beta}$

b) Taux d'accroissement de f entre a et b :

Pour tous réels a et b de D_f : $\tau_{(a; b)} =$

c) Tableau de variation :

On retiendra:	1 ^{er} cas:	x	
		$f(x) = \sqrt{\alpha x + \beta}$	
	2 ^{ième} cas:	x	
		$f(x) = \sqrt{\alpha x + \beta}$	

3) Graphe de $f(x) = \sqrt{\alpha x + \beta}$:

a) Exemples: Déterminer D_f , dresser le tableau de variation de f , dresser un tableau de valeurs, puis construire le graphe de f

i) $f(x) = \sqrt{x}$ ii) $f(x) = \sqrt{x-3}$ iii) $f(x) = \sqrt{-x-1}$ iv) $f(x) = \sqrt{\frac{1}{2}x+3}$ v) $f(x) = \sqrt{-2x+5}$

b) Exercices: 1) On considère la fonction: $f(x) = \sqrt{9-2x}$

a) Déterminer les points d'intersection du graphe de f et des axes de coordonnées
 b) Construire le graphe de f

c) Résoudre algébriquement, puis vérifier graphiquement les équations:

i) $f(x) = \sqrt{5}$ ii) $f(x) = 2,5$ iii) $f(x) = -1$ iv) $f(x) = 2x - 3$ v) $f(x) = -x + 5$

2)a) Résoudre algébriquement, puis vérifier avec une calculatrice graphique:

- i) $\sqrt{x} \geq x$ ii) $\sqrt{x-2} \leq x-2$
 iii) $\sqrt{2x-5} < \sqrt{x-2}$ iv) $\sqrt{7x+15} < \sqrt{-2x+3}$
 b) Dresser le tableau de signes de: $\frac{1}{2\sqrt{x-2}} - \frac{1}{x-2}$

IV) Fonctions homographiques:

($c \neq 0$ et $ad - bc \neq 0$) $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$

1) Fonction $f(x) = \frac{k}{x}$, (k réel non nul fixé) : $D_f =$

a) Pour tout x de D_f , $f(-x) =$ donc f est une fonction impaire
 donc le graphe de f est

On étudie le sens de variation de f sur
 On en déduit par symétrie le sens de variation de f sur

b) Asymptotes :

- i) *** Lorsque x tend vers: $+\infty$, $f(x)$ tend vers:
 *) La droite d'équation (axe) est une asymptote « horizontale » au graphe de f
ii) * Lorsque x tend vers: 0^+ , $f(x)$ tend vers:
 *) La droite d'équation (axe) est une asymptote « verticale » au graphe de f

On retiendra:

1 ^{er} cas:	x	
	$f(x) = \frac{k}{x}$	
2 ^{ième} cas:	x	
	$f(x) = \frac{k}{x}$	
Asymptotes:		

c) Exemples : Construire (sans tableau de valeurs) le graphe de f

- i) $f(x) = \frac{1}{2x}$ ii) $f(x) = -\frac{3}{2x}$

2) Cas général: $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ (a ; b ; c et d sont des réels tels que: $c \neq 0$ et $ad - bc \neq 0$) :

a) Exemples : 1) $f(x) = \frac{2x-2}{x+3}$ les graphes des fonctions: f ; g sont notés: G_f ; G_g

- a) Déterminer D_f
 b) i) Déterminer par « identification des polynômes » les réels β et k tels que:
 Pour tout réel x de D_f : $\frac{2x-2}{x+3} = \beta + \frac{k}{x+3}$

ii) Même question en effectuant la division euclidienne de: $2x - 2$ par $x + 3$

c) Soit $g(x) = -\frac{8}{x}$

i) Démontrer que: $M(x;y)$ appartient à $G_f \Leftrightarrow N(x+3; y-2)$ appartient à G_g

ii)*) Montrer que M est l'image de N par une translation $t_{\vec{u}}$

***) Que peut-on en déduire pour G_f et G_g ?

iii)*) Construire G_f

***) Donner les équations des asymptotes de G_f
 et les coordonnées du centre de symétrie de G_f

2) $f(x) = \frac{-6x+27}{8x-20}$ les graphes des fonctions: f ; g sont notés: G_f ; G_g

a) Déterminer D_f

b) Déterminer par division euclidienne les réels β et k tels que:

Pour tout réel x de D_f : $\frac{-6x+27}{8x-20} = \beta + \frac{k}{x-\frac{5}{2}}$

c) Soit $g(x) = \frac{3}{2x}$

i) Démontrer que: $M(x;y)$ appartient à $G_f \Leftrightarrow N(x - \frac{5}{2}; y + \frac{3}{4})$ appartient à G_g

ii)*) Montrer que M est l'image de N par une translation $t_{\vec{u}}$

***) Que peut-on en déduire pour G_f et G_g ?

iii)*) Donner les coordonnées du centre de symétrie de G_f
 et les équations des asymptotes de G_f

***) Construire G_f

b) Cas général: $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ ($c \neq 0$ et $ad - bc \neq 0$) :

a) Déterminer D_f

b) Exprimer en fonction de a ; b ; c et d , les réels β et k tels que:

Pour tout réel x de D_f : $\frac{ax+b}{cx+d} = \beta + \frac{k}{x+\frac{d}{c}}$

c) Soit $g(x) = \frac{bc-ad}{c^2x}$

i) Démontrer que: $M(x;y)$ appartient à $G_f \Leftrightarrow N(x + \frac{d}{c}; y - \frac{a}{c})$ appartient à G_g

ii)*) Montrer que M est l'image de N par une translation $t_{\vec{u}}$

***) Que peut-on en déduire pour G_f et G_g ?

iii) Donner les coordonnées du centre de symétrie et les équations des asymptotes de G_f

iv) Pour construire G_f dans le repère (O, \vec{i}, \vec{j}) , on construit G_g , dans le repère

$$(\Omega, \vec{i}, \vec{j})$$

On retiendra:

$$f(x) = \frac{ax + b}{cx + d} \quad (c \neq 0 \text{ et } ad - bc \neq 0) \quad D_f =$$

G_f est l'hyperbole d'équation: $y = \frac{ax + b}{cx + d}$, dont les asymptotes sont les droites:

Le centre de symétrie de G_f est $\Omega(\quad ; \quad)$

c) Remarque: On peut construire une hyperbole en utilisant la méthode décrite au **IV)2)b)** ou connaissant sa forme générale, utiliser quelques points bien choisis

d) Exemples: Déterminer: D_f ; les asymptotes à G_f ; le centre de symétrie de G_f
Puis construire G_f dans le repère (O, \vec{i}, \vec{j}) , en déduire le tableau de variation de f

$$\text{i) } f(x) = \frac{-3x + 10}{x - 4} \quad \text{ii) } f(x) = \frac{3x + 4}{2x - 3} \quad \text{iii) } f(x) = \frac{-2x + 1}{3x + 1} \quad \text{iv) } f(x) = \frac{4x - 7}{2 - 3x}$$

e) Exercices: 1)a) $f(x) = \frac{2x - 3}{x - 1}$ Déterminer: D_f ; les asymptotes à G_f ; le centre de symétrie de G_f

Puis construire G_f dans le repère (O, \vec{i}, \vec{j})

b) Résoudre graphiquement, puis algébriquement les inéquations:

$$\text{i) } \frac{2x - 3}{x - 1} \geq -x + 3 \quad \text{ii) } \frac{2x - 3}{x - 1} \geq x + 1 \quad \text{iii) } \frac{2x - 3}{x - 1} \geq \frac{1}{4}x + \frac{3}{4}$$

2)a) Déterminer des réels a ; b ; c et d tels que l'hyperbole $H: y = \frac{ax + b}{cx + d}$ admette pour asymptote la droite d'équation: $y = 2$ et passe par les points: $A(2; 1)$ et $B(0,5; -2)$

b)i) Construire H dans le repère (O, \vec{i}, \vec{j})

ii) Construire le graphe de la fonction $f(x) = \left| 2 - \frac{2}{x} \right|$, dans le repère (O, \vec{i}, \vec{j})

c)i) Construire la parabole $P: y = -x^2 - 2x + 3$, dans le repère (O, \vec{i}, \vec{j})

ii) Résoudre graphiquement puis algébriquement:

$$\text{*) } 2 - \frac{2}{x} = -x^2 - 2x + 3 \quad \text{**) } 2 - \frac{2}{x} \geq -x^2 - 2x + 3$$