

## I- Définitions du parallélisme.

Définition : On dit que deux **droites** sont **coplanaires** quand il existe un même plan qui les contient toutes les deux.

Définition : Deux **droites** sont **strictement parallèles** lorsqu'elles sont coplanaires et n'admettent aucun point commun.

Remarque : Deux droites coplanaires sont soit parallèles, soit sécantes.

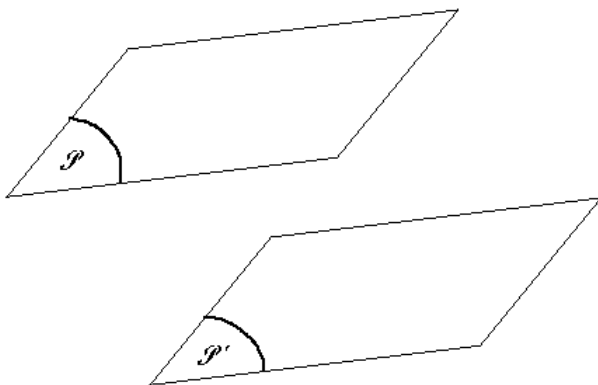
Définition : Deux **plans** sont **strictement parallèles** lorsqu'ils n'ont aucun point commun.

Définition : **Une droite et un plan** sont **strictement parallèles** lorsqu'ils n'ont aucun point commun.

## II- Positions relatives

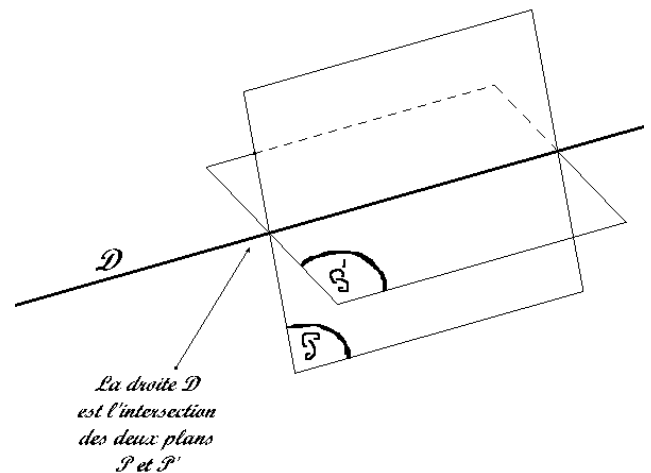
### 1- Positions relatives de deux plans

Deux plans de l'espace peuvent être confondus, (strictement) parallèles ou sécants.



#### Plans parallèles

Deux plans sont strictement parallèles lorsqu'ils n'ont aucun point en commun



#### Plans sécants

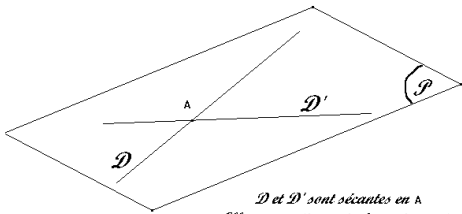
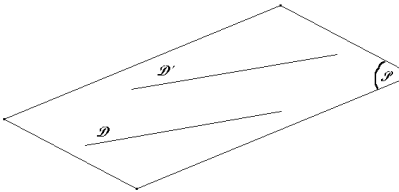
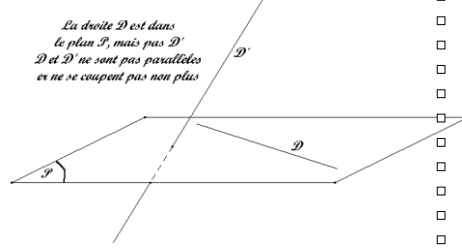
L'intersection de deux plans est une droite

### 2- Positions relatives de deux droites.

Deux droites de l'espace peuvent être :

- Sécantes
  - Parallèles
- Elles sont alors coplanaires

## - Non-coplanaires

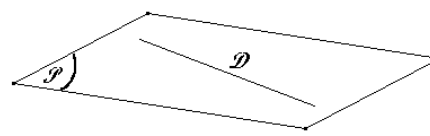
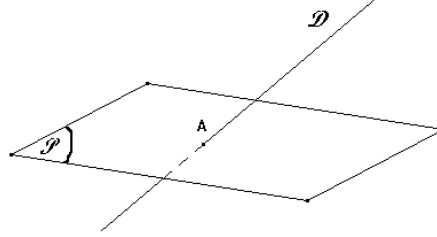
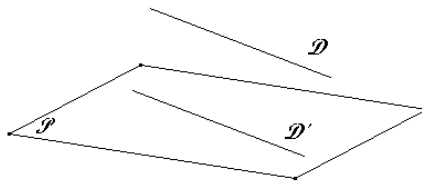
 <p><i>D et D' sont sécantes en A Elles appartiennent nécessairement à un même plan P qui contient A</i></p> <p><b><u>Droites sécantes</u></b> dans un plan P</p> <p><b>Propriété :</b> 2 droites sécantes définissent un plan. (= il existe un plan et un seul qui contient deux droites sécantes données)</p>	 <p><b><u>Droites parallèles</u></b> (contenues toutes deux dans un même plan P)</p> <p><b>Propriété :</b> 2 droites strictement parallèles définissent un plan. (= il existe un plan et un seul qui contient deux droites strictement parallèles)</p>	 <p><i>La droite D est dans le plan P, mais pas D'. D et D' ne sont pas parallèles et ne se coupent pas non plus</i></p> <p><b><u>Droites non coplanaires.</u></b></p> <p>Il n'existe pas de plan contenant ces deux droites à la fois.</p>
--	--	--

**!** Dans l'espace, deux droites qui n'ont pas de point commun ne sont pas nécessairement parallèles. Elles peuvent, aussi, être non coplanaires.

### 3- Positions relatives d'un plan et d'une droite.

Une droite D peut être :

- Contenue dans un plan P
- Sécante au plan P
- (strictement) Parallèle à P.

 <p><b><u>D est contenue dans P</u></b> Tous les points de la droite appartiennent au plan</p>	 <p><b><u>D est sécante à P</u></b> D et P n'ont qu'un point commun</p> <p>La droite « perce » le plan.</p>	 <p><b><u>D est parallèle à P :</u></b> Elle est parallèle à une droite D' contenue dans P D et P n'ont aucun point en commun. Une droite D est parallèle à un plan P quand elle est parallèle à une droite contenue dans P.</p>
---	---	---

### III- Propriétés du parallélisme dans l'espace.

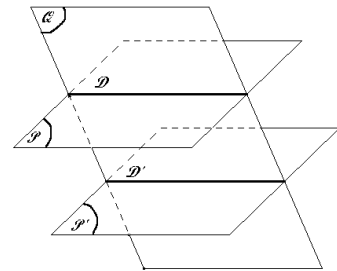
## Propriétés :

- Si deux plans sont parallèles, tout plan parallèle à l'un est parallèle à l'autre.
- Si deux plans sont parallèles, tout plan qui coupe l'un coupe l'autre et les intersections sont des droites parallèles. = Théorème 1
- Si deux plans sont parallèles, toute droite qui coupe l'un coupe l'autre
- Si deux plans sont parallèles, toute droite parallèle à l'un est aussi parallèle à l'autre
- Si deux droites sont parallèles, tout plan sécant à l'une est aussi sécant à l'autre.
- Si deux droites sont parallèles, tout plan parallèle à l'une est aussi parallèle à l'autre.
- Si deux droites sont parallèles, toute droite parallèle à l'une est aussi parallèle à l'autre



Si deux droites sont parallèles, toute sécante à l'une n'est pas nécessairement sécante à l'autre (si elle ne se situe pas dans le même plan que les deux droites parallèles)

**Théorème 1 :** Lorsque deux plans  $P$  et  $P'$  sont parallèles, alors tout plan  $Q$  qui coupe  $P$  coupe aussi  $P'$ , et les intersections de  $Q$  avec les plans  $P$  et  $P'$  sont deux droites parallèles.



**Ci-contre :**  $P$  et  $P'$  sont parallèles.

$Q$  coupe  $P$  selon  $D$

$Q$  coupe  $P'$  selon  $D'$

Donc  $D$  et  $D'$  sont parallèles.

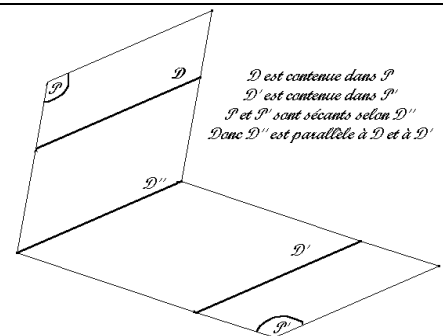
**Théorème 2 :** (Théorème « du toit » )

Si  $D$  et  $D'$  sont deux droites parallèles, et que

-  $D$  est contenue dans un plan  $P$

-  $D'$  est contenue dans un plan  $P'$

alors, si  $P$  et  $P'$  sont sécants, leur intersection est parallèle à  $D$  et à  $D'$ .

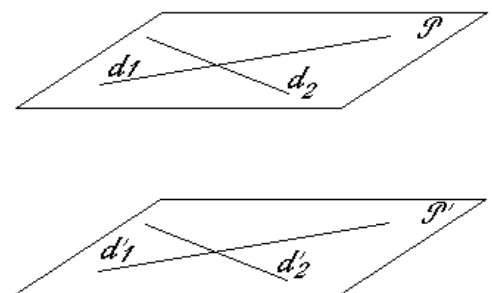


**Théorème 3 :**

Si deux droites sécantes d'un plan  $P$  sont parallèles, respectivement, à deux droites sécantes d'un plan  $P'$ , alors les plans  $P$  et  $P'$  sont parallèles.

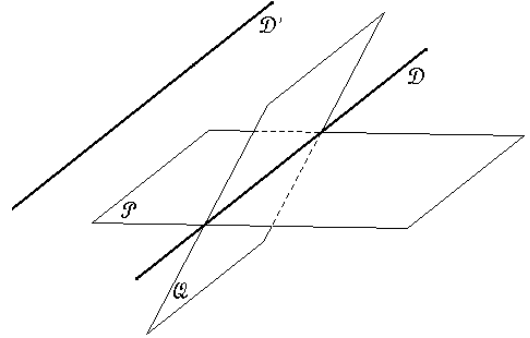
**Ci-contre :**  $d_1$  et  $d_2$  sont deux droites sécantes contenues dans  $P$ .

$d'_1$  et  $d'_2$  sont deux de  $P'$ ,  $d'_1$  étant parallèle à  $d_1$  et  $d'_2$  à  $d_2$ .  $P$  et  $P'$  sont donc parallèles.



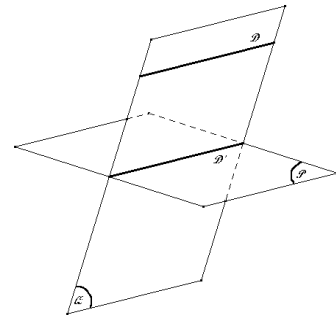
**Théorème 4 :** Si une droite  $D$  est parallèle à une droite  $D'$ , alors tout plan contenant  $D$  est parallèle à  $D'$ .

**Ci-contre :**  $D$  et  $D'$  sont parallèles.  
Les plans  $P$  et  $Q$  contiennent  $D$ .  
Donc les plans  $P$  et  $Q$  sont parallèles à  $D'$ .



**Théorème 5 :**  
Si  $D$  est une droite parallèle à un plan  $P$ , alors tout plan  $Q$  contenant  $D$  et sécant à  $P$  coupe  $P$  selon une droite parallèle à  $D$ .

**Ci-contre :** La droite  $D$  est parallèle au plan  $P$ .  
Le plan  $Q$ , contenant  $D$ , coupe  $P$  selon une droite  $D'$ , qui est nécessairement parallèle à  $D$ .



## - Orthogonalité dans l'espace.

### I- Définitions de la perpendicularité et de l'orthogonalité.

#### 1- Droites perpendiculaires et droites orthogonales

**Définitions :** Deux **droites** sont **perpendiculaires** lorsqu'elles se coupent en formant un angle droit.

Deux **droites** sont **orthogonales** lorsque, si, par un point donnée, on trace leurs parallèles, ces parallèles sont perpendiculaires entre elles.

**Remarque :** Deux droites perpendiculaires sont nécessairement orthogonales.

Mais deux droites orthogonales ne sont pas perpendiculaires si elles ne sont pas coplanaires.

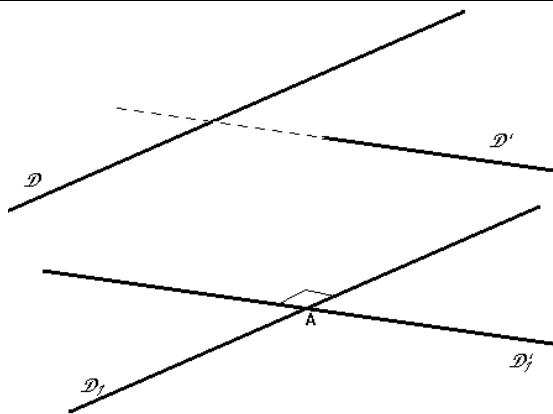
**Différence entre « perpendiculaire » et « orthogonal » en général :**

Pour « perpendiculaire », il doit y avoir une intersection.

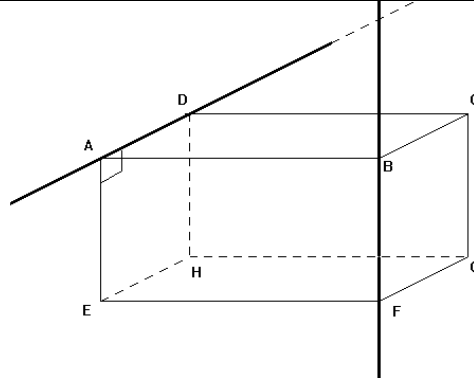
Des vecteurs orthogonaux, par exemple, ne se coupent pas nécessairement.

Illustration du cas général :

Illustration dans un parallélépipède rectangle :



D et D' sont non-coplanaires  
(considérez sur la figure que D' passe  
« en-dessous » de D).  
A est un point donné.  
On trace  $D_1$ , la parallèle à D passant  
par A.  
On trace  $D'_1$ , la parallèle à D' passant  
par A.  
Si  $D_1$  et  $D'_1$  forment un angle droit (en  
A),  
alors D et D' sont dites orthogonales.



ABCDEFGH est un parallélépipède  
rectangle.

(BF) et (AD), par exemple, sont non  
coplanaires mais cependant  
orthogonales.

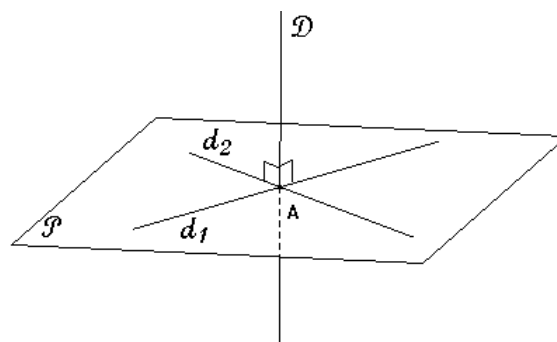
En effet, la parallèle à (BF) passant par  
A est (AE) et (AE) est perpendiculaire à  
(AD) dans le rectangle ADHE.

## 2- Plan et droite perpendiculaires

**Définition** : une **droite** D est  
**perpendiculaire à un plan** P quand  
elle est orthogonale à deux droites  
sécantes contenues dans P.

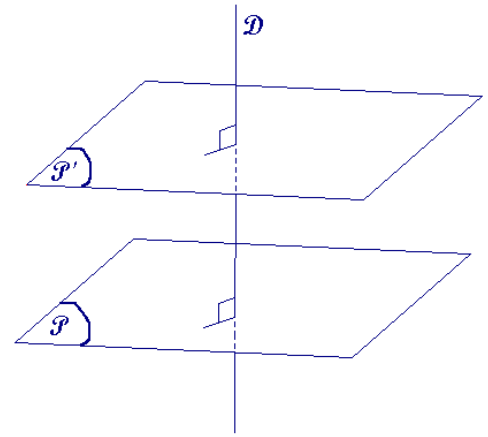
**Ci-contre** : La droite D est  
perpendiculaire,

- d'une part, à  $d_1$  qui est contenue dans  
P
  - d'autre part, à  $d_2$  qui l'est aussi et qui  
coupe  $d_1$ .
- Donc D est perpendiculaire à P.

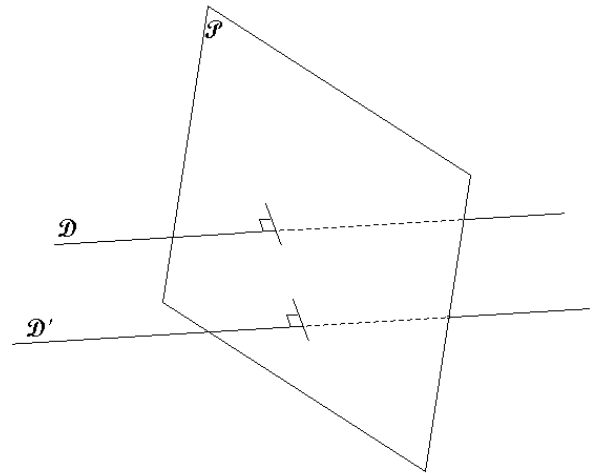


## II- Propriétés

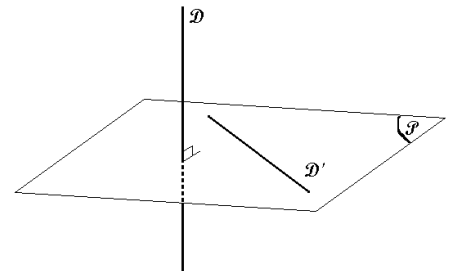
- Deux plans orthogonaux à une même droite sont parallèles.
- Si deux plans sont parallèles, toute droite perpendiculaire à l'une est aussi perpendiculaire à l'autre.



- Deux droites orthogonales à un même plan sont parallèles.
- Si deux droites sont parallèles, tout plan perpendiculaire à l'une est aussi perpendiculaire à l'autre.



- Si une droite  $D$  et un plan  $P$  sont orthogonaux, alors  $D$  est orthogonale à toute droite contenue dans  $P$ .



Ci-contre :  $D$  est orthogonale à  $P$ .

$D'$  est contenue dans  $P$ .

Donc  $D$  et  $D'$  sont orthogonales.

III- Plan médiateur d'un segment. C'est l'équivalent de la médiatrice, dans l'espace.

## Définitions :

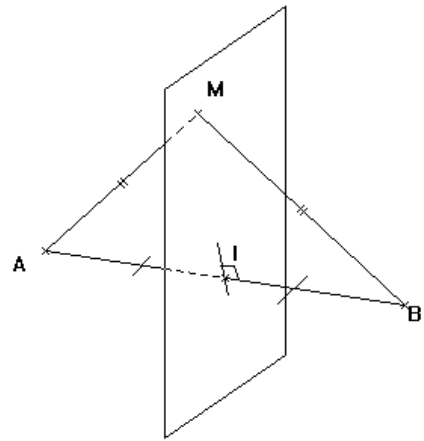
1- Le **plan médiateur** d'un segment est le plan qui lui est **perpendiculaire** et passe par son **milieu**.

2- Le **plan médiateur** d'un segment [AB] est l'**ensemble des points du plan équidistants de A et de B**.

- Si un point M est sur le plan médiateur de [AB], alors  $AM = BM$

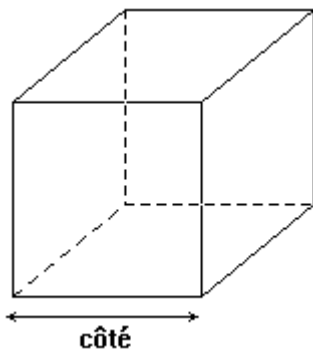
## Réciproquement :

- Si un point M de l'espace est tel que  $AM = BM$ , alors M est sur le plan médiateur de [AB]



## Volumes des solides de l'espace Formules à connaître parfaitement

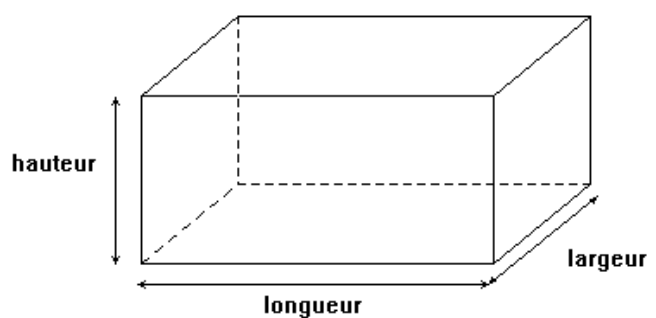
### Cube :



$$\text{Volume} = \text{côté}^3$$

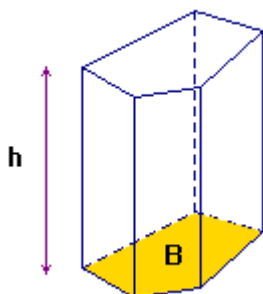
( Volume = côté × côté × côté )

### Parallélépipède rectangle :



$$\text{Volume} = \text{Longueur} \times \text{largeur} \times \text{hauteur}$$

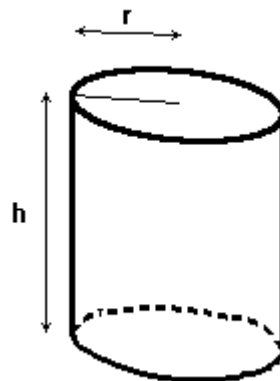
### Prisme (droit ou non) :



$$\text{Volume} = \text{Base} \times \text{hauteur}$$

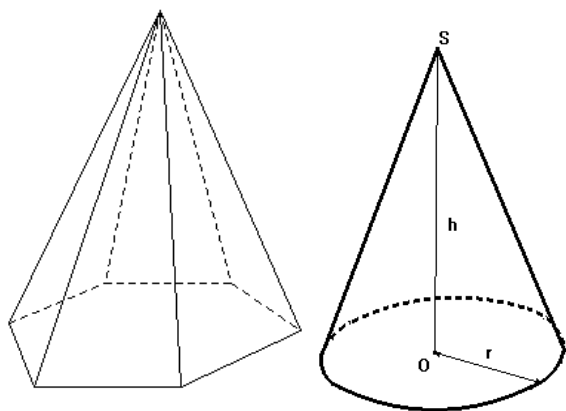
$$\text{Volume} = B \times h$$

### Cylindre :



$$\text{Volume} = \text{Base} \times \text{hauteur}$$
$$\text{Volume} = \pi r^2 \times h$$

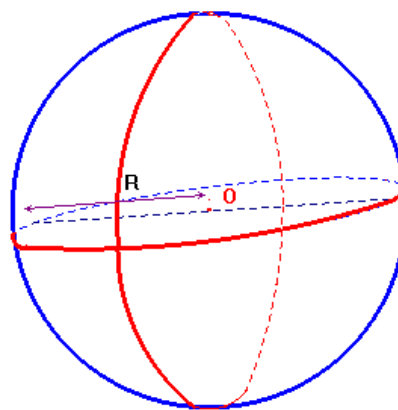
### Pyramide ou cône :



$$\text{Volume} = \frac{1}{3} \text{ Base} \times \text{hauteur}$$

$$\text{Pour le c\^one : Volume} = \frac{1}{3} \pi r^2 \times h$$

### Sphère :



$$\text{Volume de la boule} = \frac{4}{3} \pi R^3$$

$$\text{Aire latérale de la sphère} = 4 \pi R^2$$