FONCTION POLYNOME ET FONCTION RATIONNELLE YOUSSEF BOULILA

I) GÉNÉRALITÉS:

1) Fonction polynôme :

a) Définition: Toute fonction du type:

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \dots\dots + a_2x^2 + a_1x + a_0$$

avec: a_n ; a_{n-1} ; a_{n-2} ;.....; a_2 ; a_1 ; a_0 réels quelconques fixés ($a_n \neq 0$)
est une fonction polynôme de degré n (on dit aussi un polynôme de degré n)

b) Exemples: Le polynôme $P_1(x) = 3x^2 - \frac{2}{3}x + 1$ est de degré , on note: $d^o(P_1) =$

Le polynôme $P_2(x) = -\frac{1}{3}x^4 - 5x$ est de degré , on note: $d^o(P_2) =$

Le polynôme $P_3(x) = -2x + \sqrt{5}$ est de degré , on note: $d^o(P_3) =$

Le polynôme $P_4(x) = \frac{3}{\sqrt{2}}$ est de degré , on note: $d^o(P_4) =$

c) Exercices: 1)a) Développer et réduire: $(a + b)^3$ et $(a - b)^3$

b) Développer, réduire et ordonner les polynômes: $A(x) = (-2x + 1)^3$; $B(x) = (-5x - 3)^3$

2)a)i) Développer et réduire: $(a + b + c)^2$ et $(a + b - c)^2$

ii) Remarquer que l'on peut retrouver $(a + b - c)^2$ à partir de $(a + b + c)^2$

b) Déduire du 3)a) , le développement de:

i) $(a - b + c)^2$; $(a - b - c)^2$; $(-a - b - c)^2$; $(-a + b - c)^2$; $(-a + b + c)^2$

ii) $(a + b)^4$; $(a - b)^4$

c) Développer, réduire et ordonner les polynômes:

$P(x) = (x^2 + x + 1)^2$; $Q(x) = (-x^2 - 2x - 3)^2$; $T(x) = (-2x^2 + x - 3)^2$

$U(x) = (3x - 5)^4$; $V(x) = (-2x + 3)^4$

d) Déterminer le réel k pour que: $x^4 - 2x^3 + (k + 1)x^2 - kx + 4$ soit le carré d'un polynôme

3)a) Soit: $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ un polynôme du $3^{\text{iéme}}$ degré
Démontrer qu'il est possible de trouver, par « identification » quatre réels: m ; n ; p et q tels que: $P(x) = m + nx + px(x - 1) + qx(x - 1)(x - 2)$

b) Ecrire x^3 sous la forme $m + nx + px(x - 1) + qx(x - 1)(x - 2)$

On retiendra:

$(a + b)^3 =$; $(a - b)^3 =$; $(a + b + c)^2 =$

Pour tout entier n supérieur à 1 : $x^n - a^n =$

Pour tout entier n impair et supérieur à 1 : $x^n + a^n =$

2) Fonction rationnelle:

a) Définition: Une fonction rationnelle est le quotient de deux fonctions polynômes

b) Exercices: 1) Déterminer le domaine de définition puis, écrire sous la forme du quotient de deux fonctions polynômes:

i) $f(x) = 2 - \dfrac{3}{x+1}$ ii) $f(x) = 2 + \dfrac{1}{x} - \dfrac{3}{2-x}$

iii) $f(x) = x - \dfrac{2}{3} + \dfrac{1}{x^2+1}$ iv) $f_4(x) = 2x + 1 - \dfrac{x+3}{x^2-x-2} + \dfrac{2}{x}$

2) Déterminer le domaine de définition puis simplifier les fonctions rationnelles:

i) $E(x) = \dfrac{6-2x}{x^2-6x+9}$ ii) $Q(x) = \dfrac{(x-1)(x-3)+(x-1)(x-5)}{x^2-1}$

iii) $H(x) = \dfrac{(x^4-1)(x^2-2x)}{(x^3-4x)(x^3-x)}$ iv) $J(x) = \dfrac{x^2-1}{x^3+1}$

3)a)i) Déterminer D_q , le domaine de définition de la fonction rationnelle:

$q(x) = \dfrac{x^2-2x-1}{(x+1)^2(x-1)}$

ii) Déterminer par « identification », les réels a ; b et c tels que:

pour tout réel x de D_q , on ait: $\dfrac{x^2-2x-1}{(x+1)^2(x-1)} = \dfrac{a}{x+1} + \dfrac{b}{(x+1)^2} + \dfrac{c}{x-1}$

iii) Autre méthode (facultatif) :

*) Multiplier l'égalité précédente par (x - 1) , puis dans la nouvelle égalité obtenue,

remplacer x par 1 , qu'obtient-on ?

*) Multiplier l'égalité précédente par $(x + 1)^2$, puis dans la nouvelle égalité obtenue,

remplacer x par - 1 , qu'obtient-on ?

*) Peut-on en déduire a ?

b)i) Déterminer D_q , le domaine de définition de la fonction rationnelle:

$q(x) = \dfrac{x^2+3x-1}{(x-1)^2(x+2)}$

ii) Déterminer par « identification », les réels a ; b et c tels que:

pour tout réel x de D_q , on ait: $\dfrac{x^2+3x-1}{(x-1)^2(x+2)} = \dfrac{a}{x-1} + \dfrac{b}{(x-1)^2} + \dfrac{c}{x+2}$

iii) (Facultatif) Adapter la méthode du a)iii) afin de déterminer b et c puis en déduire a

II) EQUATIONS DU SECOND DEGRÉ (OU S'Y RAMENANT) :

1) Exercices:

1) Résoudre les équations:

i) $x(x-1) = 3$ ii) $(x-1)^2 = x(2x-3)$ iii) $(2x+1)(5-x) = (4x+2)^2$

iv) $x^3 - 6x^2 + 9x = 0$ v) $x^3 + x^2 = 3x - x^2$ vi) $(2-x)^3 = (x-2)^2 - 2 + x$

2) Factoriser si possible les polynômes:

$p_1(x) = -x^2 + x + 1$; $p_2(x) = -x^2 + x - \dfrac{1}{4}$; $p_3(x) = 2x^2 + x + 3$

3) Quelle valeur doit-on donner au réel a pour que: $\dfrac{1}{3}$, soit racine de: $(a-2)x^2 - 3x + \dfrac{a}{9}$?

4)a) Pour quelles valeurs de k , l'équation: $x^2 + 2x - 8 = k$, admet-elle deux solutions ?

b) Vérifier graphiquement en construisant la parabole d'équation: $y = x^2 + 2x - 8$

5) Pour quelles valeurs de m , le polynôme: $p_m(x) = 3x^2 - 4mx + 12$, admet-il une seule racine ?

6) Résoudre les équations:

i) $x + 1 = \frac{1}{x}$ ii) $x + 1 = \frac{1}{x+1}$ iii) $2x - 1 = \frac{x+1}{x-3}$ iv) $x^2 + 4 = \frac{4}{x+1}$

v) $x + \frac{2}{x} = -3$ vi) $2 - \frac{3}{x} + \frac{9}{x^2} = 0$ vii) $\frac{x+1}{x} + \frac{x+2}{x+1} = 1$ viii) $\frac{2x}{x+2} + \frac{x+3}{2x} = 2$

7)a) Factoriser: $x^2 + x - 56$

b) Déterminer le domaine d'étude, puis résoudre l'équation: (E): $\frac{4x-28}{x+5} = x^2 + x - 56$

8) Résoudre les systèmes d'équations: i) $\begin{cases} x - y + 1 = 0 \\ 3x^2 + y^2 - 2xy - 2y + 1 = 0 \end{cases}$ ii) $\begin{cases} y + x - 1 = 0 \\ x^2 + y^2 + 3x - 3y - 2 = 0 \end{cases}$

<u>2) Relation entre les coefficients et les racines de $p(x) = ax^2 + bx + c$:</u>

<u>a)</u> Si □ > 0 Alors $p(x)$ admet deux racines: x_1 et x_2 , et on a:

$x_1 + x_2 =$ et $x_1 \times x_2 =$

<u>b)</u> Si □ = 0 Alors $p(x)$ admet une « racine double »: x_1 , et on a:

$x_1 + x_1 =$ et $x_1 \times x_1 =$

<u>On retiendra:</u> La somme « des » racines de $p(x) = ax^2 + bx + c$ est égale à :

Le produit « des » racines de $p(x) = ax^2 + bx + c$ est égal à:

<u>c) Exercices:</u> 1) Après avoir trouvé une racine « évidente » de $p(x)$, trouver l'autre

i) $p(x) = x^2 + 7x - 8$ ii) $p(x) = - 2x^2 + 3x + 5$ iii) $p(x) = 0,5x^2 - 3x + 4$

2)a) Pour quelle valeur de m , 3 est-il racine de: $p_m(x) = 2x^2 - mx - 10 - m$?
b) Lorsque $m = 2$, déterminer l'autre racine de: $p_2(x)$ (sans calculer □)

<u>d)</u> Trouver (si possible) deux nombres x et y , connaissant leur somme s et leur produit p

$\begin{cases} x + y = s \\ xy = p \end{cases} \Leftrightarrow$

On retiendra: Les solutions de: $x + y = s$ et $x.y = p$, sont le(s) solution(s) (si elle(s) existe(nt)) de: $x^2 - sx + p = 0$

e) Exercice: Déterminer (si possible) les dimensions d'un rectangle
i) Dont le périmètre est : 8 cm , et l'aire: 3,75 cm^2
ii) Dont le périmètre est : 8 cm , et l'aire: 5 cm^2
iii) Dont la longueur des diagonales est : 2,5 cm , et l'aire: 3 cm^2

3) Equations bicarrées.

Résoudre les équations: i) $x^4 - 8x^2 + 16 = 0$ ii) $x^4 - 4x^2 + 4 = 0$ iii) $x^4 + 2x^2 + 1 = 0$

iv) $x^4 - 7x^2 + 12 = 0$ v) $x^4 - x^2 - 12 = 0$ vi) $6x^4 + 11x^2 + 4 = 0$

vii) $x^4 - x^2 - 1 = 0$

4) Equations irrationnelles.

a) Résoudre: i) $x - \sqrt{x} - 2 = 0$ ii) $\frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{2}{x} - 1$

b) Résoudre: i) $\sqrt{3x+1} = 1 - x$ ii) $3 - \sqrt{1-2x} = x$

iii) $\sqrt{x+4} + \sqrt{x+7} = 3$ iv) $\sqrt{2x+3} - \sqrt{x+1} = 1$

III) Inéquations se ramenant à l'étude du signe de p(x) = ax² + bx + c :

1) Rappel:

On retiendra: $ax^2 + bx + c$ est du signe de

2) Exercices: 1)a) Dresser le tableau de signes de p(x) (On calculera , le moins souvent possible)

i) $p(x) = - (x + 1)^2 - 3$ ii) $p(x) = 2x^2 + 3x - 5$ iii) $p(x) = - x^3 + 2x^2 - 35x$

b) Déduire du a) les solutions des inéquations:

i) $- (x + 1)^2 < 3$ ii) $- (x + 1)^2 > 3$ iii) $2x^2 + 3x \geq 5$

iv) $3x \leq 5 - 2x^2$ v) $35x < -x^3 + 2x^2$ vi) $x^3 > 2x^2 - 35x$

2) Résoudre les inéquations: (On calculera Δ, le moins souvent possible)

i) $-x^2 + 1 > -x$ ii) $x^2 < x - 4$ iii) $x + 3 \geq -2x^2$

iv) $x^2 - 3{,}5x \geq -2{,}5$ v) $x(x + \sqrt{2} - 1) < \sqrt{2}$ vi) $\frac{4}{7}x > -x^2 + \frac{3}{7}$

3) On considère les équations : (E_m): $x^2 - 2mx + m = 0$ (m est un paramètre réel)

a) Pour quelles valeurs de m, (E_m), admet-elle une seule solution ?
b) Pour quelles valeurs de m, (E_m), admet-elle deux solutions ?
c) Pour quelles valeurs de m, (E_m), n'admet-elle pas de solution ?

4) Résoudre les systèmes d'inéquations: (On calculera Δ, le moins souvent possible) puis vérifier graphiquement en construisant une parabole pour chacun des cas

i) $0 < x^2 - x < 2$ ii) $-1 \leq -x^2 + 4x - 1 < 1$ iii) $-1 < x^2 + x \leq 2$

5) (Facultatif) Résoudre les inéquations: (On calculera Δ, le moins souvent possible)

i) $x^4 - 7x^2 + 12 > 0$ ii) $x^4 - x^2 - 12 < 0$

iii) $6x^4 + 11x^2 + 4 < 0$ iv) $x^4 - x^2 + 1 \geq 0$

6)a) Dresser le tableau de signes de $q(x)$ (On calculera Δ, le moins souvent possible)

i) $q(x) = \frac{-x^2 + 4x - 4}{-x + 3}$ ii) $q(x) = \frac{3x^2 - 3x}{x^2 - x - 6}$ iii) $q(x) = 1 - \frac{2}{x+1} + \frac{3}{x-2}$

b) Déduire du a) les solutions des inéquations:

i) $\frac{-x^2 + 4x}{-x + 3} < \frac{4}{-x + 3}$ ii) $\frac{3x}{x^2 - x - 6} < \frac{3x^2}{x^2 - x - 6}$ iii) $1 + \frac{3}{x-2} \geq \frac{2}{x+1}$

7) Résoudre les inéquations: (On calculera Δ, le moins souvent possible)

i) $\frac{x^2 + 5x + 6}{-x + 1} \geq 0$ ii) $\frac{-2(1 - 3x)}{-x^3 + x^2 - 3x} \leq 0$ iii) $\frac{-x^2 - 5x - 6}{x^2 + x - 6}$

iv) $1 > \frac{1}{x^2}$ v) $\frac{1}{x+1} > \frac{x}{x+2}$ vi)

$$\frac{1}{x+1} - x < -\frac{2}{x-2}$$

IV) Situations concrètes du second degré :

1) Gestion d'une salle de spectacle :

On a constaté, dans une salle de spectacle de 300 places, que, pour un spectacle donné, le nombre de
spectateurs N , est une fonction affine du prix d'entrée: x (en Flux).

1) Sachant que lorsque le spectacle est gratuit, la salle est pleine, et que lorsque le prix d'entrée est de
60 (Flux), il y a 180 spectateurs, déterminer l'expression de N en fonction de x

2)a) Dans un repère orthogonal adapté au problème, construire le graphe de la fonction affine
$x \mapsto -2x + 300$
b) Résoudre algébriquement puis graphiquement l'inéquation: $-2x + 300 \geq 0$
c) Déduire de ce qui précède, les valeurs de x pour lesquelles la formule du 1) est « valable ».

3)a) Calculer le montant de la recette pour: i) $x = 0$ ii) $x = 60$ iii) $x = 90$ iv) $x = 120$ v) $x = 150$
b) Déterminer l'expression de la recette en fonction de x

4)a) Dresser le tableau de variation de la fonction: $x \mapsto -2x^2 + 300x$
b) Déduire du 4)a) , la valeur de x pour laquelle, la recette est maximale, et la valeur maximale de la recette

5)a) Résoudre l'inéquation: $-2x^2 + 300x \leq 11\,250$
b) Expliquer pourquoi, le 5)a) constitue une vérification algébrique du 4)b)

2) Valeur marchande d'une pierre précieuse :

Une unité monétaire et une unité de masse étant correctement fixés, (mais nous n'avons pas à les connaître),
La valeur marchande d'un certain type de pierre précieuse, est égale à:

« la moitié du carré de sa masse »

Vous possédez une de ces pierres précieuses d'une masse égale à: 1 , mais par accident vous la cassez en deux morceaux: M_1 et M_2
Soit x la masse du morceau M_1

1)a) A quel intervalle x appartient-il ?
b) Exprimer en fonction de x :
i) La valeur marchande du morceau M_1
ii) La valeur marchande du morceau M_2

c) Exprimer en fonction de x , la valeur marchande totale des deux morceaux, après l'accident

2)a) Dresser le tableau de variation de la fonction: $x \mapsto x^2 - x + \frac{1}{2}$

b) Déduire du 2)a) la situation pour laquelle, la valeur marchande totale des deux morceaux, après
l'accident est minimale, et la valeur marchande totale des deux morceaux, après l'accident dans ce cas

c) Déterminer la situation pour laquelle, la valeur marchande totale des deux morceaux, après
l'accident est de $\frac{5}{16}$. Remarque ?

3)a) Résoudre l'inéquation: $x^2 - x + \frac{1}{2} \geq \frac{1}{4}$

b) Expliquer pourquoi, le 3)a) constitue une vérification algébrique du 2)b)

V) Factorisation d'un polynôme p(x) de degré n lorsqu'on connaît une racine de p(x) :

1) Propriété fondamentale :

a) Exemple: Vérifier que 2 est une racine du polynôme $P(x) = x^3 - 5x^2 + 3x + 6$, on a donc

$$\begin{aligned}
P(x) &= \quad P(x) \quad - \quad P(2) \\
&= x^3 - 5x^2 + 3x + 6 - (2^3 - 5\times 2^2 + 3\times 2 + 6) \\
&= x^3 - 2^3 - 5x^2 + 5\times 2^2 + 3x - 3\times 2 + 6 - 6 \\
&= (x^3 - 2^3) - 5(x^2 - 2^2) + 3(x - 2) \\
&= (x - 2)(x^2 + \qquad\qquad) - 5(x - 2)(\qquad) + 3(x - 2) \\
&= (x - 2)(\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad) \\
&= (x - 2)(\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad)
\end{aligned}$$

b) Cas général: Supposons que le réel □ est une racine du polynôme:

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \ldots\ldots\ldots\ldots + a_2x^2 + a_1x + a_0 \quad \text{on a donc:}$$

$$\begin{aligned}
P(x) &= \quad P(x) \quad - \quad P(\square) \\
&= a_n x^n+a_{n-1}x^{n-1}+a_{n-2}x^{n-2}+\ldots\ldots+a_2x^2+a_1x+a_0 - (a_n\square^n+a_{n-1}a^{n-1}+a_{n-2}a^{n-2}+\ldots\ldots+a_2\square^2+a_1\square+a_0) \\
&= a_n(x^n-\square^n)+a_{n-1}(x^{n-1}-\square^{n-1})+a_{n-2}(x^{n-2}-\square^{\tilde{n}\square}\ldots\ldots\ldots+a_2(x^2-\square^{\square})+a_1(x-\square)
\end{aligned}$$

En remarquant que dans chacun des termes: $(x^n-\square^n)$; $(x^{n-1}-\square^{n-1})$; $(x^{n-2}-\square^{\tilde{n}\square}$;..........; $(x^2-\square^{\square}$; $(x-\square)$,
on peut mettre en facteur, on en déduit que l'on peut écrire $P(x) = (x-\square).Q(x)$, où $Q(x)$ est un polynôme de degré

On retiendra:	Si □ est une racine du polynôme P(x) Alors il existe un polynôme Q(x) tel que: $P(x) = (x - \square).Q(x)$ « Si $P(\square) =$, Alors on peut mettre $(x - \square)$ en facteur dans P(x) »

c) Méthodes: **i)** $P(x) = x^3 - x^2 - 11x - 10$; Calculer $P(-2)$

donc -2 est de $P(x)$

donc $P(x) = (x - \quad)(\quad)$ avec: ; et réels

Il est évident que: et que:

donc: $x^3 - x^2 - 11x - 10 = (x \quad)(\quad)$

donc: $x^3 - x^2 - 11x - 10 = x^3 \qquad - 10$

donc: $x^3 - x^2 - 11x - 10 = x^3 \qquad -10$

donc: $\left\{ \right.$ donc: $\left\{ \right.$ donc: donc: $P(x) =$

C'est la méthode par identification

C'est la méthode par division euclidienne

iii) $P(x) = P(x) - P(-2)$

$= x^3 - x^2 - 11x - 10 - ((-2)^3 - (-2)^2 - 11\times(-2) - 10)$

$= x^3 - \quad - (x^2 - \quad) - 11(x - \quad)$

$= (x + 2)(\quad) - (x + 2)(\quad) - (x + 2)$

$= (x + 2)(\quad)$

C'est la méthode de la démonstration du V)1)b)

d) Exercices: 1)a) $P(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + m$

Déterminer la valeur du réel m pour que 1 soit racine de $P(x)$

b) Ecrire $x^3 - 2x^2 - 5x + 6$ sous forme d'un produit de trois polynômes du 1er degré

2)a) $P(x) = x^3 - 7x + 6$; montrer que l'on peut mettre $(x - 1)$ en facteur dans $P(x)$, puis

effectuer cette factorisation par les trois méthodes du **V)1)c)**

b) Résoudre l'inéquation: $x^3 + 6 < 7x$

3) Le plan est muni d'un repère

a) Déterminer la valeur des réels m et k pour que la parabole P : $y = x^2 - 2x - m$

et l'hyperbole H : $y = \frac{k}{x}$ soient sécantes au point $A(3 ; 2)$

b) On fixe $k = 6$ et $m = 1$, démontrer que A est le seul point d'intersection de P et H

4)a) $f(x) = x^4 - 52x^2 - 200x - 2$; $g(x) = - 5x^3 + 24x + m$
Déterminer m pour que $f(- 4) = g(- 4)$

b) Résoudre: $x^4 - 52x^2 - 200x - 2 > - 5x^3 + 24x - 2$

5)a) Déterminer le réel m tel que - 3 soit solution de l'équation:

(E): $(x + 1) = (x-1)(x^2 + mx + 0,5)$

b) Déterminer le domaine d'étude, puis résoudre l'inéquation: (I):
$\frac{x+1}{x-1} \geq x^2 + 3x + 0,5$

Conclusion: $x^3 - x^2 - 11x - 9 =$

$x^3 - x^2 - 11x - 10 =$

$x^2 - 4x + 3 =$

$2x^2 - 5x + 7 =$

On retiendra: Effectuer la division euclidienne du polynôme A(x) par le polynôme B(x)
c'est déterminer deux polynômes: Q(x) (le quotient) et R(x) (le reste)

tels que: $\begin{cases} A(x) = \\ \text{avec : } d^0(R) \qquad d^0(B) \end{cases}$

b) Remarques: 1) A(x) est divisible par B(x) $\Leftrightarrow$

2) La « Loi du reste »:
Dans la division euclidienne du polynôme A(x) par le polynôme B(x)
Si B(x) = x - □ Alors d^0(R) =
Alors A(x) = (x - □).Q(x)+
Alors A(□) =
Alors A(x) = (x - □).Q(x)+

c) Exercices: 1)a) Utiliser la « loi du reste », pour déterminer le reste de la division euclidienne de:
$3x^3 - 8x^2 + 9x - 4$ par $x - 2$

b) Effectuer la division euclidienne de: $3x^3 - 8x^2 + 9x - 4$ par $x - 2$

2)a) Effectuer la division euclidienne de: $-6x + 5$ par $2x - 1$

b) Ecrire l'égalité entre polynômes, déduite de a)

c)i) Déterminer D_q le domaine de définition de la fonction rationnelle $q(x) =$

$$\frac{-2x+1}{3x-2}$$

ii) Déduire de b) l'écriture de $\frac{-6x+5}{2x-1}$ sous la forme: $a + \frac{b}{2x-1}$ $(a ; b) \in \mathbf{R}^2$

3)a) Effectuer la division euclidienne de: $-2x + 1$ par $3x - 2$

b) Ecrire l'égalité entre polynômes, déduite de a)

c)i) Déterminer D_q le domaine de définition de la fonction rationnelle $q(x) =$

$$\frac{-2x+1}{3x-2}$$

ii) Déduire de b) l'écriture de $\frac{-2x+1}{3x-2}$ sous la forme: $a + \frac{b}{3x-2}$ $(a ; b) \in \mathbf{R}^2$

4)a) Effectuer la division euclidienne de: $3x^2 - 2x + 1$ par $2x - 1$

b) Ecrire l'égalité entre polynômes, déduite de a)

c)i) Déterminer D_q le domaine de définition de la fonction rationnelle $q(x) =$

$$\frac{3x^2-2x+1}{2x-1}$$

ii) Déduire de b) l'écriture de $\frac{3x^2-2x+1}{2x-1}$ sous la forme:

$ax + b + \frac{c}{2x-1}$

$(a ; b ; c) \in \mathbf{R}^3$

5)a) Effectuer la division euclidienne de: $-3x^4 - 3x^2 - 2x - 1$ par $x^2 - x - 2$

b) Ecrire l'égalité entre polynômes, déduite de a)

c)i) Déterminer D_q le domaine de définition de la fonction rationnelle

$$q(x) = \frac{-3x^4-3x^2-2x-1}{x^2-x-2}$$

ii) Déduire de b) l'écriture de $\frac{-3x^4-3x^2-2x-1}{x^2-x-2}$ sous la forme:

$ax^2 + bx + c + \frac{dx+f}{x^2-x-2}$ $(a ; b ; c ; d ; f) \in \mathbf{R}^5$

d) Déterminer par « identification » les réels □ et □ tels que pour tout réel x de

D_q

$$\frac{dx+f}{x^2-x-2} = \frac{\alpha}{x+1} + \frac{\beta}{x-2}$$

e) Conclusion ?

Ex 1: On donne les polynômes: $f(x) = -x^2 + 2x$; $g(x) = x^2 - 2x + 5$

1) Développer, réduire et ordonner dans l'ordre des puissances croissantes les polynômes:

$f(x) + g(x)$; $f(x) - g(x)$; $f(x) \times g(x)$; $[f(x)]^2$; $[g(x)]^2$

$[f(x)+g(x)]^2$; $[f(x)-g(x)]^2$

2) Utiliser les résultats du 1) pour déterminer la forme réduite et ordonnée dans l'ordre des puissances croissantes des polynômes:

a) $[f(x)]^2 - [g(x)]^2$; $[f(x)+g(x)] \times [f(x)-g(x)]$

b) $[f(x)]^2 + [g(x)]^2$; $[f(x)+g(x)]^2 - 2f(x) \times g(x)$

c) Que remarque-t-on ?

Ex 2: 1)a) Pour tout entier n supérieur à 1 , rappeler la factorisation de $x^n - a^n$

b)i) Donner la factorisation de $x^3 - a^3$, en déduire celle de $x^3 + a^3$

ii)Déduire de 1)a) la factorisation, pour tout entier n impair supérieur à 1 , de $x^n + a^n$

2) Ecrire sous forme de produits de polynômes dont le degré sera le plus petit possible

$A(x) = (x + 5)^2 - 2x^2 + 50$; $B(x) = (x^2 - 4)^2 - (3x - 6)^2$

$C(x) = x^3 - 8 + (x - 2)(x^2 - 6x - 2)$; $D(x) = x^3(x + 5) - 8x - 40$

$E(x) = x^3(2x - 3) + 16x - 24$; $F(x) = x^5 - x^3 - x^2 + 1$

$G(x) = (2x + 1)^3 - (x - 2)^3$; $H(x) = (2x + 1)^3 + (x - 2)^3$

Ex 3: 1)a) Construire avec soin les graphes des fonctions: $f(x) = -\frac{2}{x}$ et $g(x) = -x + 1$ dans un repère orthonormal (unité 1cm)

b) Résoudre graphiquement l'inéquation: $-\frac{2}{x} \geq -x + 1$

2) Résoudre algébriquement l'inéquation: $-\frac{2}{x} \geq -x + 1$

Ex 4: 1)a)i) Déterminer les zéros des fonctions: $f(x) = \frac{x-1}{x-2}$ et $g(x) = -x^2 + 3x - 2$

ii) Ecrire $g(x)$ sous la forme d'un produit de deux fonctions polynôme du 1er degré

b) Résoudre i) $f(x) = g(x)$ ii) $f(x) > g(x)$

2)a) Déterminer m, pour que 3,5 soit solution de l'équation: $x - 2 = (x - 3)(-x^2 + 5x - m)$

b) Résoudre: $\frac{x-2}{x-3} = -x^2 + 5x - 2{,}25$

Ex 5: 1)a) En utilisant la « Loi du reste », déterminer le résultat complet de la division euclidienne de

$a(x) = 2x^2 + x - 8$ par $b(x) = x - 1$, sans effectuer la division

b) Ecrire $q(x) = \frac{2x^2 + x - 8}{x-1}$ sous la forme: $ax + b + \frac{c}{x-1}$ $(a ; b ; c) \in \mathbf{R}^3$

2)a) Effectuer la division euclidienne de $a(x) = 2x^3 + 3x^2 - 3x - 3$ par $b(x) = (x + 1)^2$

b) Déterminer D_q l'ensemble de définition de: $q(x) = \frac{2x^3 + 3x^2 - 3x - 3}{(x+1)^2}$

c) Ecrire $q(x) = \frac{2x^3 + 3x^2 - 3x - 3}{(x+1)^2}$ sous la forme: $ax + b - \frac{cx + d}{(x+1)^2}$ $(a ; b ; c ; d) \in \mathbf{R}^4$

d) Déterminer le résultat complet de la division euclidienne de $3x + 2$ par $x + 1$

sans effectuer la division

e) Ecrire $q(x) = \frac{2x^3 + 3x^2 - 3x - 3}{(x+1)^2}$ sous la forme: $ax + b + \frac{e}{(x+1)^2} + \frac{f}{(x+1)}$ $(e ; f) \in \mathbf{R}^2$

Ex 6 : 1) Effectuer la division euclidienne de $2x^3 + 5x^2 - 2x - 7$ par $(x + 2)^2$

2) Déterminer D_q l'ensemble de définition de: $q(x) = \dfrac{2x^3 + 5x^2 - 2x - 7}{(x+2)^2}$

3) Ecrire $q(x) = \dfrac{2x^3 + 5x^2 - 2x - 7}{(x+2)^2}$ sous la forme: $ax + b + \dfrac{cx + d}{(x+2)^2}$ $(a\,;\,b\,;\,c\,;\,d) \in \mathbf{R}^4$

4) Déterminer par identification les réels m et n tels que: $\dfrac{2x+5}{(x+2)^2} = \dfrac{m}{x+2} + \dfrac{n}{(x+2)^2}$