

1^{er} Exercice : (5 points)

Partie I

Pour chacune des questions suivantes cocher la ou les bonne(s) réponse(s)

1- soit (U_n) une suite arithmétique de premier terme $U_0 = -3$ et de raison r tel que $U_{19} = 35$

$U_{21} = 41$ $U_{21} = 39$ $r = 2$

2 - soit (U_n) une suite réelle telle que $U_n = 2$; pour tout $n \in \mathbb{N}$

(U_n) une suite arithmétique de premier terme $U_0 = 2$ et de raison $r = 0$.

(U_n) une suite arithmétique de premier terme $U_0 = 2$ et de raison $r = 1$.

3 – On considère l'équation (E) : $3x^2 + 4x - 7 = 0$

(E) admet deux racines distinctes de mêmes signes.

$3x^2 + 4x - 7 \leq 0$ équivaut à $x \in \left[\frac{-7}{3}; 1 \right]$

Partie II

Répondre par « vrai » ou « faux » aux assertions suivantes :

1- Dans le plan muni du repère orthonormé $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$ on considère les points

$A(2 ; 1)$; $B(3 ; 4)$ et $C(-2 ; -11)$.

a - Les points A ; B et C sont alignés.

b - Les vecteurs \overrightarrow{AB} et \overrightarrow{AC} sont orthogonaux

c - Pour tout point M on a : $-5\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC} + 4\overrightarrow{MB} = \vec{0}$.

2 - O est le centre de gravité d'un triangle EFG.

a - $\overrightarrow{OE} + \overrightarrow{OF} + \overrightarrow{OG} = \vec{0}$

b - pour tout point M du plan on a : $\overrightarrow{ME} + \overrightarrow{MF} + \overrightarrow{MG} = 3\overrightarrow{MO}$

2^{eme} EXERCICE : (9 points)

On les expressions suivantes : $A(x) = x^2 + x - 6$ et $B(x) = 2x^2 - 3x + 4$

1) a) Résoudre dans \mathbb{R} : $A(x) = 0$; puis dresser le tableau de signe de l'expression $A(x)$

b) Préciser la position du réel **1** par rapport aux racines de $A(x) = 0$

c) Déduire l'ensemble des solutions de l'équation $x^4 + x^2 - 6 = 0$

2) a) Montrer que : $B(x) > 0$ pour tout réel x

b) On pose $f(x) = \frac{A(x)}{B(x)}$

c) Déterminer l'ensemble des réels x pour lesquels $f(x)$ est bien définie

d) Déduire des questions précédentes l'ensemble des solutions de l'inéquation: $f(x) \geq 0$.

3) Résoudre dans \mathbb{R} : $\sqrt{B(x)} > |x - 2|$, puis $\sqrt{B(x)} \geq x - 2$.

3^{eme} EXERCICE : (6 points)

(On ne demande pas de faire une figure)

Soit $ABCD$ un trapèze de bases $[AB]$ et $[CD]$.

Soient E et F les deux points définis comme suit :

$$2\overrightarrow{FA} + 5\overrightarrow{FB} = \vec{0} \quad \text{et} \quad 3\overrightarrow{EC} + 4\overrightarrow{ED} = \vec{0}$$

1) Montrer que : $\overrightarrow{AF} = \left(\frac{5}{7}\right)\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CE} = \left(\frac{4}{7}\right)\overrightarrow{CD}$.

2) Soit G le milieu du segment $[EF]$

$$\text{Montrer que : } 2\overrightarrow{GA} + 5\overrightarrow{GB} + 3\overrightarrow{GC} + 4\overrightarrow{GD} = \vec{0}$$

3) Soit M un point et \vec{u} et \vec{v} deux vecteurs tels que :

$$\vec{u} = 2\overrightarrow{MA} + 5\overrightarrow{MB} + 3\overrightarrow{MC} + 4\overrightarrow{MD} \quad \text{et} \quad \vec{v} = 2\overrightarrow{MA} + 5\overrightarrow{MB} - 3\overrightarrow{MC} - 4\overrightarrow{MD}$$

a) Exprimer \vec{u} en fonction de \overrightarrow{MG}

b) Montrer que $\vec{v} = 7\overrightarrow{FE}$

c) Déterminer l'ensemble des points M tel que : $\|\vec{u}\| = \|\vec{v}\|$

Correction du devoir de synthèse N°1

1^{er} Exercice :

PARTIE I

1- $U_{21} = 39$ et $r = 2$

2- On a $U_n = 2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ donc $U_{n+1} = U_n = 2 = U_0$

Donc $U_{n+1} - U_n = 0$

Donc (U_n) est une suite arithmétique de raison $r = 0$ et de 1^{er} terme $U_0 = 2$

3- On considère l'équation (E) : $3x^2 + 4x - 7 = 0$

On a $3 \times (-7) < 0$ Donc (E) admet deux racines et de signes contraires

D'où la 1^{ere} réponse est fausse, il reste à vérifier la 2^{eme}

On résout l'équation (E). On remarque que $3 + 4 - 7 = 0$ donc 1 est racine

et la 2^{eme} racine est égale à $(-7/3)$. Le tableau de signe de $3x^2 + 4x - 7$ est le suivant :

	$-\infty$	$-7/3$	1	$+\infty$
$3x^2 + 4x - 7$	+	-	+	

D'après le tableau en déduit : $3x^2 + 4x - 7 \leq 0$ équivaut à $x \in [-7/3; 1]$

Partie II

On a : $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} -4 \\ -12 \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AC} = -4\overrightarrow{AB}$ d'où les points A ; B et C sont alignés, et par suite a) vrai et de plus la réponse b) est fausse

$$\begin{aligned} \underline{c)} -5\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC} + 4\overrightarrow{MB} &= -5\overrightarrow{MA} + (\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AC}) + 4(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB}) \\ &= \underbrace{(-5\overrightarrow{MA} + 5\overrightarrow{MA})}_{\vec{0}} + \underbrace{\overrightarrow{AC} + 4\overrightarrow{AB}}_{\vec{0}} = \vec{0} \end{aligned}$$

D'où la réponse c) vrai

Car $\overrightarrow{AC} = -4\overrightarrow{AB}$

2- a) vrai (voir cours). b) vrai, il suffit d'introduire le point O et utiliser la relation de CHASLES.

2eme Exercice :

1) a) On a $A(x) = x^2 + x - 6$, $A(x) = 0$ équivaut à $x^2 + x - 6 = 0$

On remarque que la somme (resp : somme alternée) des coefficients est non nulle

Donc il faut calculer le discriminant $\Delta = 1 - 4 \times (-6) = 25 = 5^2 > 0$

Donc les racines sont : $x_1 = \frac{-1+5}{2} = 2$ et $x_2 = \frac{-1-5}{2} = -3$

ainsi $S_{\mathbb{R}} = \{-3 ; 2\}$. Donc le tableau de signe est le suivant :

	$-\infty$	-3	1	$+\infty$
$x^2 + x - 6$	+	-	+	

b) évident que $-3 \leq 1 \leq 2$. c) (*) : $x^4 + x^2 - 6 = 0$ équivaut à $(x^2)^2 + x^2 - 6 = 0$

On pose $y = x^2$ donc $x^4 + x^2 - 6 = 0$ équivaut à $y^2 + y - 6 = 0$

D'après 1) a) on déduit que les racines de $y^2 + y - 6 = 0$ sont -3 et 2

Mais $y = x^2 \geq 0$ donc on conserve que la solution positive. D'où $y = 2$

Donc $x^2 = 2$ ç-à-d. dire $x = \sqrt{2}$ ou $x = -\sqrt{2}$. Il en résulte $S^{(*)}_{\mathbb{R}} = \{-\sqrt{2}; \sqrt{2}\}$

2)a) Montrons que : $B(x) > 0$ pour tout réel x

On a $B(x) = 2x^2 - 3x + 4$. Résolvons l'équation $B(x) = 2x^2 - 3x + 4 = 0$

On remarque que la somme (resp : somme alternée) des coefficients est non nulle

Donc il faut calculer le discriminant $\Delta = 9 - 4 \times 2 \times 4 = 9 - 16 = -7 < 0$

Donc $B(x)$ garde un signe constant qui est celui de 2 , d'où $B(x) > 0$ pour tout réel x

b) $f(x)$ est bien définies ssi $B(x) \neq 0$ or $B(x) > 0$ pour tout réel x

donc $f(x)$ est bien définies ssi $x \in \mathbb{R}$

c) Puisque $B(x) > 0$ alors le signe de $f(x)$ est celui de $A(x)$

Donc $f(x) \geq 0$ équivaut à $A(x) \geq 0$ équivaut à $x \in]-\infty; -3] \cup [2; +\infty[$

$$\begin{aligned} 3) \sqrt{B(x)} > |x - 2| &\text{ équivaut à } B(x) > (x - 2)^2 \\ &\text{équivaut à } 2x^2 - 3x + 4 > x^2 - 4x + 4 \\ &\text{équivaut à } x^2 + x > 0 \text{ équivaut à } x(x + 1) > 0 \end{aligned}$$

on dresse le tableau de signe

		-1	0
$x + 1$	-	+	+
x	-	-	+
Signe du produit	+	-	+

Donc $\sqrt{B(x)} > |x - 2|$ équivaut à $]-\infty, -1[\cup]0; +\infty[$

*) Pour l'inéquation $\sqrt{B(x)} \geq x - 2$, on distingue 2 cas : * si $x - 2 \geq 0$ alors

l'ensemble des solutions est : $]-\infty, -1[\cup]0; +\infty[$, * si $x - 2 < 0$ alors l'ensemble des solutions est \mathbb{R}

Conclusions : l'ensemble des solutions est : $]-\infty, -1[\cup]0; +\infty[$