DEVOIR DE SYNTHESE DE MATHEMATIQUES N° 1
CLASSE : DEUXIEME SECONDAIRE
SECTION : SCIENCES 4+5
DUREE : 2 HEURES

LYCEE DE L'INDEPENDANCE
OUED ELLIL
ANNEE SCOLAIRE : 2010- 2011
PROF : BELLASSOUED MOHAMED

EXERCICE 1 : (3 POINTS)

Répondre par « vrai ou faux » a chacune des questions suivantes sans justifier ta réponse

1- les deux vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$ sont orthogonaux .

2- si ABCD est un parallélogramme ; alors le point D est barycentre du système $\{(A,1);(B,-1);(C,1)\}$

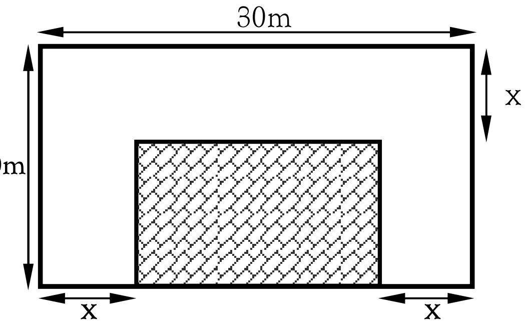
3- si P et Q deux polynômes tels que $d°P=5$ et $d°Q=3$; alors $d°(P-Q)=2$

4- le polynôme $P(x)=x^5-x^3+2x^2-2$ est factorisable par (x^2-1)

EXERCICE 2 : (3 POINTS)

Une personne achète un terrain rectangulaire de 600 m² pour y construire sa maison.

Le plan de construction de la maison sur le terrain est représenté par la figure si contre (la partie hachurée désigne la maison)



1- résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation suivante : $2x^2-70x+348=0$

2-Déterminer l'aire de la maison en fonction de x

3-Pour quelle valeur de x l'aire de la maison est-elle égale à 252

EXERCICE 3 : (6 POINTS)

1-résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation suivante : $x^2-x-20=0$

2- a vérifier que 1 est une racine du polynôme $P(x)=x^3-2x^2-19x+20$

b- Déterminer une factorisation de P

3- a- donner le tableau du signe de P(x)puis résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $x^3-2x^2-19x+20\geq 0$

b- vérifier sans utiliser le calculatrice que $P(0,9999)\succ P(1,0001)$. justifier ta réponse

4- résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $\sqrt{x^3-2x^2-19x+20}\leq x\sqrt{x-2}$

EXERCICE 4 : (8 POINTS)

ABC est un triangle isocèle en A, $AB=AC=5$; $BC=8$; $I=B*C$ et G est le centre de gravité de ABC.

1- Faire une figure puis calculer AI et AG

2- Montrer que G est le barycentre des points pondérés (A , 1) (I , 2)

3- On appelle H le barycentre de (A , 1) et (I , 2)et(B , 3).
Montrer que H est le milieu de [GB]. Construire H.

4- Soit $\mathscr{C}$ l'ensemble des points M du plan tels que $\|\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MI}+3\overrightarrow{MB}\|=\|\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MI}-3\overrightarrow{MB}\|$

a- Montrer que B appartient à $\mathscr{C}$

b- déterminer l'ensemble $\mathscr{C}$ et construire $\mathscr{C}$.

5- a- construire le point D tel que ABDC est un parallélogramme

b- montrer que $\overrightarrow{DG}=\frac{2}{3}\overrightarrow{DB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{DC}$

c- en déduire que G est barycentre des points D,B et C affectés des coefficients que l'on déterminera

d- calculer DG

CORRECTION DE DEVOIR DE SYNTHESE N°1

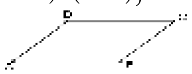
EXERCICE 1 : vraie ou faux

1-les deux vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$ sont orthogonaux : **VRAI**

<u>justification</u> $(1\times 2)+(-2\times 1)=2-2=0$

2- si ABCD est un parallélogramme ; alors le point D est barycentre du système $\{(A,1);(B,-1);(C,1)\}$ **VRAI**

<u>justification</u>



$\frac{-1}{1-1+1}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{1-1+1}\overrightarrow{AC}=-\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{BC}$ Et puisque ABCD est un parallélogramme on a $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AD}$

Donc $\overrightarrow{AD}=\frac{-1}{1-1+1}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{1-1+1}\overrightarrow{AC}$ et par suite le point D est barycentre du système $\{(A,1);(B,-1);(C,1)\}$

3- si Pet Q deux polynômes : $d°P=5$ et $d°Q=3$; alors $d°(P-Q)=2$: **FAUX**

<u>justification</u> on considère $P(x)=x^5 \text{et} Q(x)=x^3$, $P(x)-Q(x)=x^5-x^3$ et $d°(P-Q)=5$

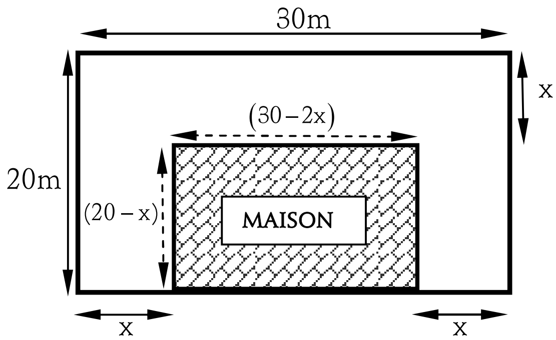
4-le polynôme $P(x)=x^5-x^3+2x^2-2$ est factorisable par (x^2-1) : **VRAI**

<u>justification</u> $P(1)=0 \text{et} P(-1)=0$,donc P(x) est facorisable par (x-1) et (x+1) donc factorisable par $(x-1)\times(x+1)=x^2-1$

EXERCICE 2 -E : $2x^2-70x+348=0$, $\Delta=b^2-4ac=(-70)^2-4\times 2\times 348=4900-2784=2116\succ 0$. E admet deux solutions

$x'=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{70-46}{4}=\frac{24}{4}=6$; $x''=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{70+46}{4}=\frac{116}{4}=29$ donc $S_{\mathbb{R}}=\{6;29\}$

2- l'aire A de la maison en fonction de x :
la maison est de forme rectangulaire de dimensions (20-x) et (30-2x)
donc A = $(30-2x)\times(20-x)=2x^2-70x+600$



3- A = 252 signifie $2x^2-70x+600=252$ avec $x\in\left]0,20\right[\cap\left]0,30\right[=\left]0,20\right[$

$2x^2-70x+600=252$ signifie $2x^2-70x+348=0$

D'après le premier question on a $x'=6$ et $x''=29$

et puisque $x\in\left]0,20\right[$ Alors la seule solution du problème est $\boxed{x=6}$

EXERCICE 3

1-E : $x^2-x-20=0$, $\Delta=b^2-4ac=(-1)^2-4\times 1\times(-20)=1+80=81\succ 0$. E admet deux solutions

$x'=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{1-9}{2}=\frac{-8}{2}=-4$; $x''=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{1+9}{2}=\frac{10}{2}=5$ donc $S_{\mathbb{R}}=\{-4;5\}$

2- a $P(1)=1^3-2\times 1^2-19\times 1+20=1-2-19+20=-1+1=0$; donc 1 est une racine de P(x)

$$\begin{aligned}P(x)&=x^3-2x^2-19x+20=(x-1)(ax^2+bx+c)\\&=ax^3+bx^2+cx-ax^2-bx-c\\&=ax^3+(b-a)x^2+(c-b)x-c\end{aligned}\quad \text{donc}\quad \begin{cases}a=1\\b-a=-2\Rightarrow b=-2+a=-1\\c-b=-19:\text{verifié}\\-c=-20\Rightarrow c=20\end{cases}$$

Et par suite $\boxed{P(x)=x^3-2x^2-19x+20=(x-1)(x^2-x+20)=(x-1)(x+4)(x-5)}$

3- a tableau de signe de P(x)

$x^3-2x^2-19x+20\geq 0 (\text{signifie}) x\in[-4,1]\cup[5,+\infty[$

x	$-\infty$	-4		1		5		$+\infty$
$x-1$	$-$		$-$	0	$+$		$+$	
x^2-x-20	$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
P(x)	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

b- d'apres le tableau $0,9999\in[-4,1] \text{donc} P(0,9999)\succ 0$

$1,0001\in[1,5] \text{donc} P(1,0001)\prec 0$

et par suite $P(0,9999)\succ P(1,0001)$

4- l'inéquation $(x^3-2x^2-19x+20\geq 0)\leq x\sqrt{x-2}$ est définie si $(x^3-2x^2-19x+20\geq 0) \text{et} (x-2\geq 0)$

Donc $x\in([-4,1]\cup[5,+\infty[)\cap([2,+\infty[)=[5,+\infty[$

5- $\sqrt{(x^3-2x^2-19x+20\geq 0)}\leq x\sqrt{x-2}$ signifie $\left(\sqrt{(x^3-2x^2-19x+20\geq 0)}\right)^2\leq\left(x\sqrt{x-2}\right)^2$

Signifie $x^3-2x^2-19x+20\leq x^2(x-2)$ signifie $x^3-2x^2-19x+20\leq x^3-2x^2$ signifie $-19x+20\leq 0$

Et par suite $x\in[5,+\infty[\cap\left[\frac{20}{19},+\infty\right[=[5,+\infty[$ donc $S_{\mathbb{R}}=[5,+\infty[$

EXERCICE 4

1- ABC est un triangle isocèle en A, I est le milieu de [BC], G est le centre de gravité de ABC.
le point G est le point d'intersection des deux médianes du triangle ABC (voir figure)

2- G est le centre de gravité de ABC donc

$\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$. d' après la relation de chasle

$\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GI}+\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{GI}+\overrightarrow{IC}=\vec{0}$ signifie $\overrightarrow{GA}+\underbrace{\overrightarrow{GI}+\overrightarrow{GI}}_{2\overrightarrow{GI}}+\underbrace{\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IC}}_{\vec{0}}=\vec{0}$ donc $\boxed{\overrightarrow{GA}+2\overrightarrow{GI}=\vec{0}}$ et puisque $1+2=3\neq 0$ alors G est le barycentre des points pondérés (A , 1) (I , 2)

3- H le barycentre de (A , 1) et (I , 2)et(B , 3) signifie $\overrightarrow{HA}+2\overrightarrow{HI}+3\overrightarrow{HB}=\vec{0}$ signifie $\underbrace{\overrightarrow{HA}+2\overrightarrow{HI}}_{3\overrightarrow{HG}}+3\overrightarrow{HB}=\vec{0}$ signifie $3\overrightarrow{HG}+3\overrightarrow{HB}=\vec{0}$

et par suite $\boxed{\overrightarrow{HG}+\overrightarrow{HB}=\vec{0}}$ ainsi H est le milieu de [GB]

4- C l'ensemble des points M du plan tels que $\left\|\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MI}+3\overrightarrow{MB}\right\|=\left\|\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MI}-3\overrightarrow{MB}\right\|$ ①

a - si M=B ; $\left\|\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MI}+3\overrightarrow{MB}\right\|=\left\|\overrightarrow{BA}+2\overrightarrow{BI}+3\underbrace{\overrightarrow{BB}}_{\vec{0}}\right\|=\left\|\overrightarrow{BA}+2\overrightarrow{BI}\right\|$

et $\left\|\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MI}-3\overrightarrow{MB}\right\|=\left\|\overrightarrow{BA}+2\overrightarrow{BI}-3\underbrace{\overrightarrow{BB}}_{\vec{0}}\right\|=\left\|\overrightarrow{BA}+2\overrightarrow{BI}\right\|$

Et par suite l'égalité ① est vérifié et donc $\boxed{B\in\mathscr{C}}$

b - $M\in\mathscr{C}$ signifie $\left\|\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MI}+3\overrightarrow{MB}\right\|=\left\|\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MI}-3\overrightarrow{MB}\right\|$

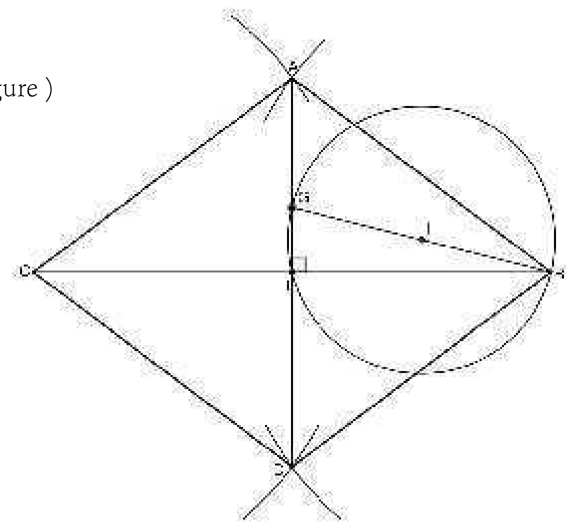
. H le barycentre de (A , 1) et (I , 2) et (B , 3) donc $\left\|\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MI}+3\overrightarrow{MB}\right\|=\left\|6\overrightarrow{MH}\right\|=6MH$

. G est le barycentre de (A , 1) (I , 2) donc $\left\|\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MI}-3\overrightarrow{MB}\right\|=\left\|3\overrightarrow{MG}-3\overrightarrow{MB}\right\|=3\left\|\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{BM}\right\|=3\left\|\underbrace{\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{MG}}_{\overrightarrow{BG}}\right\|$

Et par suite $\left\|\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MI}-3\overrightarrow{MB}\right\|=3BG$.

Ainsi $M\in\mathscr{C}$ signifie $6MH=3BG$ signifie $\boxed{MH=\frac{BG}{2}}$ Et par conséquent l'ensemble $\mathscr{C}$ cherché est le cercle de centre H et de rayon $R=\frac{BG}{2}$

Construction : $\mathscr{C}$ est le cercle de centre H et passant par B (voir figure)



5- a- voir figure

5- b $\overrightarrow{DA}=\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{DC}$

$$\begin{aligned}
&\text{signifie}\overrightarrow{DG}+\overrightarrow{GA}=\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{DC}\\
&\text{signifie}\overrightarrow{DG}=\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{AG}\\
&\text{signifie}\overrightarrow{DG}=\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{DC}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AI}\\
&\text{signifie}\overrightarrow{DG}=\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{DC}+\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}\\
&\text{signifie}\overrightarrow{DG}=\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{DC}-\frac{1}{3}\overrightarrow{DA}\\
&\text{signifie}\overrightarrow{DG}=\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{DC}-\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{DC}\right)\\
&\text{signifie}\overrightarrow{DG}=\underbrace{\left(\overrightarrow{DB}-\frac{1}{3}\overrightarrow{DB}\right)}_{\frac{2}{3}\overrightarrow{DB}}+\underbrace{\left(\overrightarrow{DC}-\frac{1}{3}\overrightarrow{DC}\right)}_{\frac{2}{3}\overrightarrow{DC}}
\end{aligned}$$

Et par suite $\boxed{\overrightarrow{DG}=\frac{2}{3}\overrightarrow{DB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{DC}}$

5- c G est barycentre du système $\{(D,\alpha);(B,\beta);(C,\gamma)\}$, avec $\alpha+\beta+\gamma\neq 0$

$$\text{signifie}\overrightarrow{DG}=\frac{\beta}{\alpha+\beta+\gamma}\overrightarrow{DB}+\frac{\gamma}{\alpha+\beta+\gamma}\overrightarrow{DC}=\frac{2}{3}\overrightarrow{DB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{DC}$$

$$\text{signifie}\begin{cases}\beta=2\\ \gamma=2\\ \alpha+\beta+\gamma=3\end{cases}\quad\text{signifie}\begin{cases}\beta=2\\ \gamma=2\\ \alpha+4=3\end{cases}\quad\text{signifie}\begin{cases}\beta=2\\ \gamma=2\\ \alpha=-1\end{cases}$$

Donc G est barycentre du système $\{(D,-1);(B,2);(C,2)\}$

5- d $DG=DI+IG=3+1=4$ donc $\boxed{DG=4}$