EXERCICE 1: 2 Points

Répondre par vrai ou faux a chacune des propositions suivantes.
Aucune justification n'est demandée

1-Le discriminant Δ du trinôme $-2x+x^2+1$ est $\Delta=9$ — 1

2-Si $\overrightarrow{GA}=\frac{3}{4}\overrightarrow{GB}$ alors G est barycentre des points pondérés $(A,4)$ et $(B,-3)$ — 1

EXERCICE 2: 6 Points

On considère le polynôme $P(x)=x^3-6x^2+11x-6$

1- a-Montrer que 2 est une racine du polynôme P — 0,25

b-En déduire que $P(x)=(x-2)(x^2-4x+3)$ — 0,75

2- a-Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $x^3-6x^2+11x-6=0$ — 1

b-En déduire les solutions dans $\mathbb{R}$ de l'équation $x^6-6x^4+11x^2-6=0$ — 0,75

c-Factoriser le polynôme $Q(x)=x^6-6x^4+11x^2-6$ en produit de 6 facteurs de premier degré — 0,75

3- a-Donner le tableau de signe de $P(x)$ — 0,5

b-En déduire que pour tout réel x de l'intervalle $[1,2]$ on a $P(x+1)\le P(x)$ — 0,5

4- a-Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $x^3-6x^2+11x-6\le 0$ — 0,5

b-En déduire les solutions dans $\mathbb{R}$ de l'inéquation $\sqrt{x^3+11x}\le\sqrt{6x^2+6}$ — 1

EXERCICE 3 : 5 Points

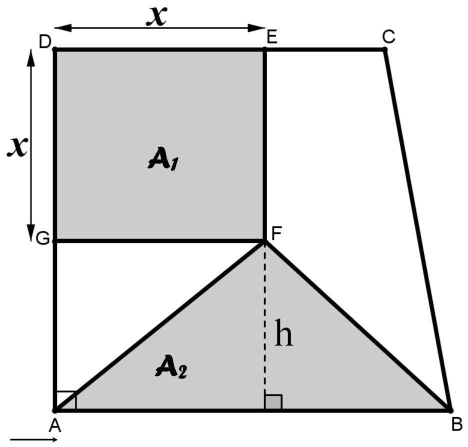


figure1

Dans la figure1 si contre on a :

- ABCD est un trapèze isocèle et rectangle en A
- $AB=AD=6cm$ et $DC=5cm$
- EFGD est un carrée de coté x et d'aire $\mathcal{A}_1$; $x\in\left]0,5\right]$
- ABF est un triangle de hauteur h et d'aire $\mathcal{A}_2$

1- a-Exprimer les deux aires $\mathcal{A}_1$ et $\mathcal{A}_2$ en fonction de x — 0,5

b-Déterminer x pour que $\mathcal{A}_1=\mathcal{A}_2$ — 1

2- Le plan est rapporté au repère orthonormé $\mathscr{R}=(A,\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD})$

a-Sur quel intervalle I varie t-il le réel x ? — 0,25

b-Déterminer les coordonnées des points A, B, D et F dans le repère $\mathscr{R}$ — 1

c-Montrer que les points B , D et F sont alignés pour tout réel x du l'intervalle I — 0,75

d-Déterminer x pour que les deux vecteurs $\overrightarrow{AF}$ et $\overrightarrow{BF}$ soient orthogonaux — 1,5

Exercice 4 : 7 Points

Soit ABC un triangle isocèle en A . $AB = AC = 3$ et $BC = 5$

1-Construire le point G barycentre des points pondérés (A,5) et (C,-2) **0,5**

2-Soit F le point du plan tel que $5\overrightarrow{FA} + 2\overrightarrow{FB} - 2\overrightarrow{FC} = \vec{0}$

a-Montrer que F est barycentre des points pondérés (G,3) et (B,2) **0,75**

b-Construire le point F **0,5**

3-a-Déterminer et construire l'ensemble des points M du plan vérifiant $\left\|5\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MC}\right\| = 6$ **1**

b-Vérifier que A est un point de cet ensemble **0,5**

4- Montrer que la droite (AF) est parallèle a la droite (BC) **0,75**

5- La droite passante par F et parallèle a (AC) coupe (BC) en I .

Montrer que I est le barycentre des points pondérés (B,2) et (C,3) **1**

6-a-Vérifier que le quadrilatère AFIC est un parallélogramme . On note K son centre. **0,25**

b-Montrer que $\overrightarrow{CK} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CA} + \frac{1}{5}\overrightarrow{CB}$ **1**

c-En déduire que K est barycentre des points A , B et C affectés des coefficients **0,75**

α , β et γ que l'on déterminera

CORRECTION DE DEVOIR DE SYNTHESE N°1

Exercice 1

1-Le discriminant Δ du trinôme $-2x + x^2 + 1$ est $\Delta = 9$: **Faux**

Justification : $-2x + x^2 + 1 = x^2 - 2x + 1$ • $a = 1; b = -2; c = 1$. $\Delta = b^2 - 4ac = 4 - 4\times1\times1 = 4 - 4 = 0$

2- Si $\overrightarrow{GA} = \frac{3}{4}\overrightarrow{GB}$ alors G est barycentre des points pondérés (A,4) et (B,−3) : **Vrai**

Justification : $\overrightarrow{GA} = \frac{3}{4}\overrightarrow{GB}$ signifie $4\overrightarrow{GA} - 3\overrightarrow{GB} = \vec{0}$ donc G est barycentre des points (A,4) et (B,−3)

Exercice 2

1-a $P(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$

$P(2) = 2^3 - 6\times 2^2 + 11\times 2 - 6 = \underbrace{8 - 24}_{-16} + \underbrace{22 - 6}_{16} = 0$, donc 2 est une racine du polynôme P

b- $P(x) = (x-2)(x^2 - 4x + 3)$:

Première méthode

$P(x) = (x-2)(ax^2 + bx + c)$

$= ax^3 + bx^2 + cx - 2ax^2 - 2bx - 2c$

$= ax^3 + (b - 2a)x^2 + (c - 2b)x - 2c$

Par identification on aura :

$$\begin{cases} a = 1 \\ b - 2a = -6 \Leftrightarrow b = 2a - 6 = -4 \\ c - 2b = 11 : \text{verifié} \\ -2c = -6 \Leftrightarrow c = 3 \end{cases}$$

d'où $\boxed{P(x) = (x-2)(x^2 - 4x + 3)}$

deuxième méthode

On développe $(x-2)(x^2 - 4x + 3)$

$= x^3 - 4x^2 + 3x - 2x^2 + 8x - 6$

$= x^3 \underbrace{- 4x^2 - 2x^2}_{-6x^2} + \underbrace{3x + 8x}_{11x} - 6$

$= x^3 - 6x^2 + 11x - 6$

$\boxed{P(x) = (x-2)(x^2 - 4x + 3)}$

troisième méthode

$$\begin{array}{r|l} x^3-6x^2+11x-6 & x-2 \\ \hline -\ \ x^3-2x^2 & x^2-4x+3 \\ \hline 0-4x^2+11x-6 & \\ -\ \ -4x^2+8x & \\ \hline 0+3x-6 & \\ -\ \ 3x-6 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

$\boxed{P(x) = (x-2)(x^2 - 4x + 3)}$

2- a- $x^3-6x^2+11x-6=0$ signifie $(x-2)(x^2-4x+3)=0$ signifie $x-2=0$ ou $(x^2-4x+3)=0$

$x-2=0$ signifie $x=2$; $(x^2-4x+3)=0$: $1+(-4)+3=0$ donc $x'=1$ et $x''=\frac{c}{a}=3$ donc $\boxed{S_{\mathbb{R}}=\{1;2;3\}}$

. **b-**On pose $X=x^2$; E : $X^3-6X^2+11X-6=0$ d'après **2 /a** $X=x^2=1$ ou $X=x^2=2$ ou $X=x^2=3$

signifie $x=1$ ou $x=-1$ ou $x=\sqrt{2}$ ou $x=-\sqrt{2}$ ou $x=\sqrt{3}$ ou $x=-\sqrt{3}$ donc $\boxed{S_{\mathbb{R}}=\{-\sqrt{3};-\sqrt{2};-1;1;\sqrt{2};\sqrt{3}\}}$

c- $-\sqrt{3};-\sqrt{2};-1;1;\sqrt{2}et\sqrt{3}$ sont les six racines du polynôme $x^6-6x^4+11x^2-6$, et puisque le coefficient du monôme du plus degré est 1 alors : $\boxed{X^6-6X^4+11X^2-6=(x-\sqrt{3})(x-\sqrt{2})(x-1)(x+1)(x+\sqrt{2})(x+\sqrt{3})}$

3- a- le tableau de signe de P(x) **(Voir tableau)**

x	$-\infty$		1		2		3		$+\infty$
x-2		-		-	0	+		+	
x²-4x+3		+	0	-		-	0	+	
P(x)		-	0	+	0	-	0	+	

b- d'après le tableau ; Si $x\in[1,2]$ alors $P(x)\geq 0$

$x\in[1,2]$ donc $x+1\in[2,3]$ alors $P(x+1)\leq 0$

et par suite Si $x\in[1,2]$ $P(x+1)\leq P(x)$

4- a- $x^3-6x^2+11x-6\leq 0$; $\boxed{S_{\mathbb{R}}=]-\infty,1]\cup[2,3]}$

b-$\sqrt{x^3+11x}\leq\sqrt{6x^2+6}$; l'inéquation est définie si $\begin{cases}x^3+11x\geq 0\\ 6x^2+6\geq 0\end{cases}$ sig $\begin{cases}x\underbrace{(x^2+11)}_{\geq 0}\geq 0\\ \underbrace{6x^2+6}_{\geq 0}\geq 0\end{cases}$ $\Leftrightarrow x\geq 0$

$\sqrt{x^3+11x}\leq\sqrt{6x^2+6}$ sig $\begin{cases}x^3+11x\leq 6x^2+6\\ x\geq 0\end{cases}$ sig $\begin{cases}x^3+11x-6x^2-6\leq 0\\ x\geq 0\end{cases}$ sig $\begin{cases}P(x)\leq 0\\ x\geq 0\end{cases}$

donc d'après le tableau de signe $S_{\mathbb{R}}=(]-\infty,1]\cup[2,3])\cap[0,+\infty[=[0,1]\cup[2,3]$,d'où $\boxed{S_{\mathbb{R}}=[0,1]\cup[2,3]}$

Exercice 3

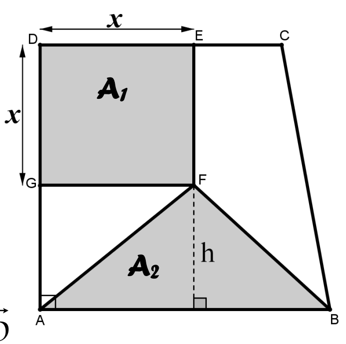
1- a- $\mathcal{A}_1=x\times x=x^2$ $\boxed{\mathcal{A}_1=x^2}$; $\mathcal{A}_2=\frac{AB\times h}{2}$; $\mathcal{A}_2=\frac{6\times\overbrace{(6-x)}^{h}}{2}=3\times(6-x)=-3x+18$; $\boxed{\mathcal{A}_2=-3x+18}$

b- $\mathcal{A}_1=\mathcal{A}_2$ sig $x^2=-3x+18$ et $x\in]0,5]$ sig $x^2+3x-18=0$ et $x\in]0,5]$

$\Delta=b^2-4ac=9-4\times1\times(-18)=4+72=81$.

$x'=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-3-9}{2}=\frac{-12}{2}=-6\notin]0,5]$ $x''=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-3+9}{2}=\frac{6}{2}=3\in]0,5]$

d'où $\mathcal{A}_1=\mathcal{A}_2$ pour $x=3$



2- a- Suivant le repère $\mathscr{R}=(A,\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD})$, **l'unité de longueur est 6 cm**

B est un point unitaire et puisque $CD=5cm$,alors $x\in I=\left]0,\frac{5}{6}\right]$

b-A(0,0) ; B(1,0) ; D(0,1) et F(x,1-x)

c- $\overrightarrow{BD}\begin{pmatrix}x_D-x_B\\ y_D-y_B\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0-1\\ 1-0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\ 1\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{BF}\begin{pmatrix}x_F-x_B\\ y_F-y_B\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x-1\\ 1-x\end{pmatrix}=(1-x)\begin{pmatrix}-1\\ 1\end{pmatrix}=(1-x)\overrightarrow{BD}$

les deux vecteurs $\overrightarrow{BF}$ et $\overrightarrow{BD}$ sont colinéaires pour tout $x\in I$ et par suite les les points B,D et F sont alignés.

d- $\overrightarrow{AF}\begin{pmatrix}x_F-x_A\\ y_F-y_A\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\\ 1-x\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BF}=\begin{pmatrix}x-1\\ 1-x\end{pmatrix}$. $\overrightarrow{AF}$ et $\overrightarrow{BF}$ sont orthogonaux sig $x(x-1)+(1-x)^2=0$

sig $x(x-1)+(x-1)^2=0$, or $x\neq 1$, alors $x+x-1=0$ sig $2x=1$ et par suite $x=0,5\in I$

EXERCICE 4

1-le point G barycentre des points pondérés (A,5) et (C,-2) : $\overrightarrow{AG}=\dfrac{-2}{5+(-2)}\overrightarrow{AC}=-\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AC}$ (voir figure)

2- a-F le point du plan tel que $5\overrightarrow{FA}+2\overrightarrow{FB}-2\overrightarrow{FC}=\vec{0}$

$5\overrightarrow{FA}+2\overrightarrow{FB}-2\overrightarrow{FC}=\vec{0}$ signifie $5\overrightarrow{FA}-2\overrightarrow{FC}+2\overrightarrow{FB}=\vec{0}$. G barycentre des points (A,5) et (C,-2) donc $5\overrightarrow{FA}-2\overrightarrow{FC}=(5-2)\overrightarrow{FG}=3\overrightarrow{FG}$:et par suite $\underbrace{5\overrightarrow{FA}-2\overrightarrow{FC}}_{3\overrightarrow{FG}}+2\overrightarrow{FB}=\vec{0}$ signifie $3\overrightarrow{FG}+2\overrightarrow{FB}=\vec{0}$

- $3+2=5\neq 0$ donc **F est barycentre des points pondérés (G,3) et (B,2)**

b- $\overrightarrow{GF}=\dfrac{2}{3+2}\overrightarrow{GB}=\dfrac{2}{5}\overrightarrow{GB}$, d'où la construction du point F (voir figure)

3- a- Ensemble des points M du plan vérifiant $\left\|5\overrightarrow{MA}-2\overrightarrow{MC}\right\|=6$

- G est barycentre des points (A,5) et (C,-2) donc $5\overrightarrow{MA}-2\overrightarrow{MC}=(5-2)\overrightarrow{MG}=3\overrightarrow{MG}$
- $\left\|5\overrightarrow{MA}-2\overrightarrow{MC}\right\|=6$ signifie $\left\|3\overrightarrow{MG}\right\|=6$ donc $\left\|\overrightarrow{MG}\right\|=2$, et par suite $GM=2$,ainsi l'ensemble cherché est **le cercle $\mathscr{C}$ de centre G et de rayon** $R=2$. Pour la construction voir figure

b- $A\in\mathscr{C}$: $\overrightarrow{AG}=-\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AC}$ donc $\left\|\overrightarrow{AG}\right\|=\left\|-\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AC}\right\|$ et par suite $AG=\dfrac{2}{3}AC=\dfrac{2}{3}\times 3=3$, ainsi $A\in\mathscr{C}$

4- ***Première méthode*** : $5\overrightarrow{FA}+2\overrightarrow{FB}-2\overrightarrow{FC}=\vec{0}$

d'après Chasles $5\overrightarrow{FA}+2(\overrightarrow{FA}+\overrightarrow{AB})-2(\overrightarrow{FA}+\overrightarrow{AC})=5\overrightarrow{FA}+2\overrightarrow{FA}-2\overrightarrow{FA}+2\overrightarrow{AB}-2\overrightarrow{AC}=\vec{0}$

sig $5\overrightarrow{FA}+2\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{CA}=\vec{0}$ sig $5\overrightarrow{FA}+2(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AB})=\vec{0}$ $5\overrightarrow{FA}+2\overrightarrow{CB}=\vec{0}$ donc $\overrightarrow{FA}=-\dfrac{2}{5}\overrightarrow{CB}$

les deux vecteurs $\overrightarrow{AF}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont colinéaires et par suite $(AF)/\!/(BC)$

deuxième méthode : • $\overrightarrow{AG}=-\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AC}=-\dfrac{2}{3}(\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{GC})=-\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AG}-\dfrac{2}{3}\overrightarrow{GC}$ sig $\overrightarrow{AG}+\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AG}=-\dfrac{2}{3}\overrightarrow{GC}$ sig

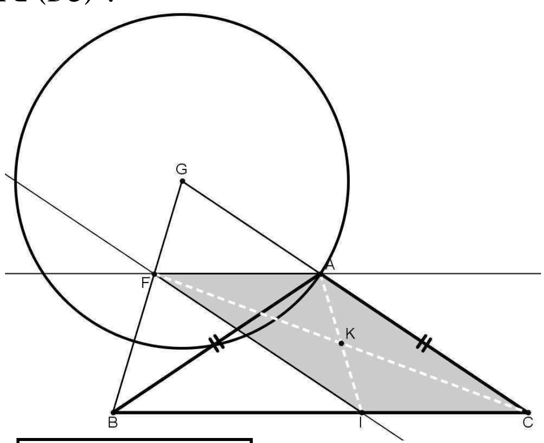
sig $\dfrac{5}{3}\overrightarrow{AG}=-\dfrac{2}{3}\overrightarrow{GC}$ et par suite $\overrightarrow{AG}=-\dfrac{2}{5}\overrightarrow{GC}$ donc $\dfrac{GA}{GC}=\dfrac{2}{5}$; • $\overrightarrow{GF}=\dfrac{2}{5}\overrightarrow{GB}$ donc $\dfrac{GF}{GB}=\dfrac{2}{5}$, ainsi $\boxed{\dfrac{GA}{GC}=\dfrac{GF}{GB}=\dfrac{2}{5}}$

- Les points G , A et C d'une part , et les points G ,F et B d'autre part sont alignés dans le même ordre, et $\dfrac{GA}{GC}=\dfrac{GF}{GB}$, donc d'après **la réciproque du théorème de Thalès** on a $(AF)/\!/(BC)$

5-On appliquant le **théorème de Thalès** tel que $(IF)/\!/(GC)$; $F\in(BG)$ et $I\in(BC)$:

$\dfrac{CI}{CB}=\dfrac{GF}{GB}=\dfrac{2}{5}$ donc $\dfrac{CI}{CB}=\dfrac{2}{5}$ et par suite $CI=\dfrac{2}{5}CB$

- Les vecteurs $\overrightarrow{CI}$ et $\overrightarrow{CB}$ sont colinéaires de même sens donc $\overrightarrow{CI}=\dfrac{2}{5}\overrightarrow{CB}=\dfrac{2}{2+3}\overrightarrow{CB}$, ainsi **I est le barycentre des points pondérés (B,2) et (C,3)** .



6- a- $(AF)/\!/(IC)$ et $(FI)/\!/(AC)$ donc AFIC est un **parallélogramme**

b-K est le centre du parallélogramme AFIC , donc $\overrightarrow{CK}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{CF}$

signifie $\overrightarrow{CK}=\dfrac{1}{2}(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CI})=\dfrac{1}{2}(\overrightarrow{CA}+\dfrac{2}{5}\overrightarrow{CB})=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{CA}+\dfrac{1}{5}\overrightarrow{CB}$ et par suite $\boxed{\overrightarrow{CK}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{CA}+\dfrac{1}{5}\overrightarrow{CB}}$

c- $\overrightarrow{CK}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{CA}+\dfrac{1}{5}\overrightarrow{CB}=\dfrac{5}{10}\overrightarrow{CA}+\dfrac{2}{10}\overrightarrow{CB}=\dfrac{\alpha}{\alpha+\beta+\gamma}\overrightarrow{CA}+\dfrac{\beta}{\alpha+\beta+\gamma}\overrightarrow{CB}$ avec $\begin{cases}\alpha=5\\ \beta=2\\ \underbrace{\alpha+\beta}_{7}+\gamma=10\Leftrightarrow\gamma=3\end{cases}$

ainsi le point **K est barycentre des points pondérés (A ,5) , (B ,2) et (C ,3)**