Mr : Mhamdi Fethi

Classe : 2ème Science

Devoir de synthèse n°1

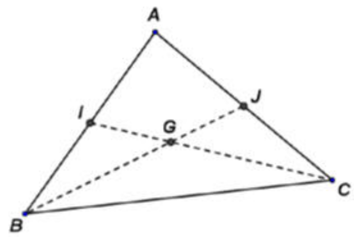
Mathématique

Noté Bien: la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements seront prisent en compte dans l'appréciation des copies.

Exercice n°1 (3 points)

Indiquer, sans justification, la réponse exacte.

1) Soit a un entier naturel tel que a divise 11 et divise 9, alors a divise :
□29□28□30
2) Soit (U_n) une suite arithmétique de raison $\boldsymbol{r}$ tel que $U_3 = -3$ et $U_{15} = 21$, alors$\boldsymbol{r} =$
□1□2□3
3) Dans la figure ci-contre, I et J sont respectivement les milieux de $[AB]$ et $[AC]$.
L'application du plan dans lui-même qui transforme I en C et J en B est :
□S_G□$h_{(G,\frac{2}{3})}$□$h_{(G,\frac{-2}{3})}$



Exercice n°2 (6 points)

Soit (U_n) la suite définie sur IN^* par : $\begin{cases} U_1 = \frac{1}{2} \\ U_{n+1} = \frac{n+1}{2n} U_n \end{cases}$

1) **a)** Calculer U_2 $et U_3$
b) En déduire que (U_n) n'est ni arithmétique ni géométrique.
2) **a)** Montrer que, pour tout $n \in IN^*$, $\frac{U_{n+1}}{U_n} = \frac{1}{2}(1 + \frac{1}{n})$
b) En déduire que, pour tout $n \in IN^*$, $\frac{1}{2} \leq \frac{U_{n+1}}{U_n} \leq 1$*
c) Comparer alors : U_{10^3-1} et U_{10^3}

3) En utilisant la relation $*$montrer que : $(\frac{1}{2})^n \leq U_n \leq \frac{1}{2}$

4) On pose $V_n = \frac{U_n}{n}$; $n \in IN^*$

   a) Montrer que (V_n) est une suite géométrique de premier terme $V_1 = \frac{1}{2}$ et de raison $q = \frac{1}{2}$

   b) Exprimer V_n en fonction de n.

   c) En déduire que $U_n = \frac{n}{2^n}$ pour tout entier naturel n non nul

5) Soit $S = V_1 + V_2 + V_3 + \cdots + V_n$

   a) Montrer que $S = 1 - \frac{1}{2^n}$

   b) Déterminer n pour que : $S \geq \frac{31}{32}$

Exercice n°3 (5 points)

Un entier est dit parfait s'il est égal à la somme de ses diviseurs propres (autre que lui-même).

Exemple :$6 = 1 + 2 + 3$; $28 = 1 + 2 + 4 + 7 + 14$

1) Vérifier que 496 est un entier parfait

2) Soit p un nombre premier différent de 2, et soit $N = p \times 2^n$ avec $n \in IN$.

   On désigne par D_N l'ensemble des diviseurs de N et par S la somme des diviseurs de N.

   a) Vérifier que :$D_N = \{2^k, 0 \leq k \leq n\} \cup \{p \times 2^k, 0 \leq k \leq n\}$

   b) Montrer que :$S = (2^{n+1} - 1) + p(2^{n+1} - 1)$

   c) En déduire que :(N est un nombre parfait $\Leftrightarrow p = 2^{n+1} - 1$)

3) Application :

   Ecrire le nombre 8128 sous la forme $p \times 2^n$ ($p$un nombre premier $\neq 2$ et $n \in IN$)

   puis déduire qu'il est parfait

Exercice n°4 (6 points)

On considère un segment $[AB]$ de longueur 6 cm, le point C de $[AB]$ tel que $AC = 4\ cm$ et les cercles ($\mathscr{C}$)de diamètre $[AB]$ et ($\mathscr{C}$'') de diamètre $[AC]$. Soit Δ une droite variable passant par A et distincte de (AB) qui recoupe ($\mathscr{C}$)enB' et ($\mathscr{C}$'') enC'. (voir figure)

1) Montrer que$(BB') \parallel (CC')$

2) Soit h l'homothétie de centre A et tel que $h(B) = C$

a) Déterminer le rapport de h

b) Déterminer l'image de B' par h

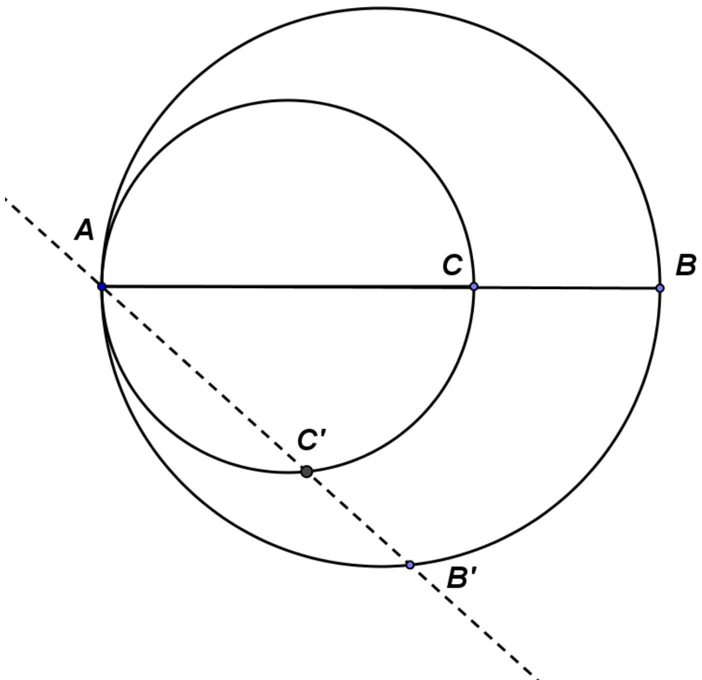
3) Soit $I = (BC') \cap (CB')$ et h' l'homothétie de centre I et tel que $h'(B) = C'$

a) Déterminer $h'(B')$

b) Déterminer le rapport de h'

4) **a)** Montrer que $\overrightarrow{CI} = \frac{2}{5}\overrightarrow{CB'}$

b) Déterminer et construire l'ensemble des points I lorsque Δ varie



Bon travail