Lycée : Souassi	*Devoir de Synthèse N°2*	*Prof* : Mr Fligène Wissem
Date : 02/03/2009		*Epreuve* : Mathématiques
Classe : 2 Sc. 2		*Durée* : 2 heures

- Il est recommandé de soigner la rédaction et la présentation de la copie -

Exercice 1 : (3 points)

1) Calculer la raison r et le premier terme U_0 d'une suite arithmétique U_n sachant que $U_5 = 3$ et $U_{15} = -27$
2) Calculer la raison q et le premier terme V_0 d'une suite géométrique V_n sachant que $V_7 = -1$ et $V_{10} = 8$

Exercice 2 : (6 points)

Soit la suite (U_n) définie par : $\begin{cases} U_0 = 3 \\ U_{n+1} = \frac{1}{2}U_n + 1 , n \in \mathbb{N} \end{cases}$

1) a) Calculer U_1 et U_2
   b) En déduire que (U_n) n'est pas une suite arithmétique et n'est pas une suite géométrique
2) Soit la suite (V_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $V_n = U_n - 2$
   a) Montrer que (V_n) est une suite géométrique de raison $q = \frac{1}{2}$ et préciser son premier terme V_0
   b) Exprimer V_n puis U_n en fonction de n
3) a) Calculer $S = V_1 + V_2 + \cdots + V_8$
   b) En déduire $S = U_1 + U_2 + \cdots + U_8$

Exercice 3 : (4 points)

1) Soit $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ tel que $tanx = \frac{3}{4}$. Calculer $cosx$ et $sinx$
2) Calculer $cos\frac{\pi}{5} + cos\frac{2\pi}{5} + cos\frac{3\pi}{5} + cos\frac{4\pi}{5}$
3) Calculer $sin^2\left(\frac{\pi}{12}\right) + sin^2\left(\frac{5\pi}{12}\right)$

Exercice 4 : (4 points)

Soit $x \in]0, \pi[$; On pose $f(x) = \frac{1}{1+cosx} + \frac{1}{1-cosx}$

1) Calculer $f\left(\frac{\pi}{2}\right)$; $f\left(\frac{\pi}{3}\right)$ et $f\left(\frac{\pi}{6}\right)$
2) Montrer que pour tout $x \in]0, \pi[$; $f(x) = \frac{2}{sin^2x}$
3) Trouver les réels $x \in]0, \pi[$ tels que $f(x) = 4$

Exercice 5 : (3 points)

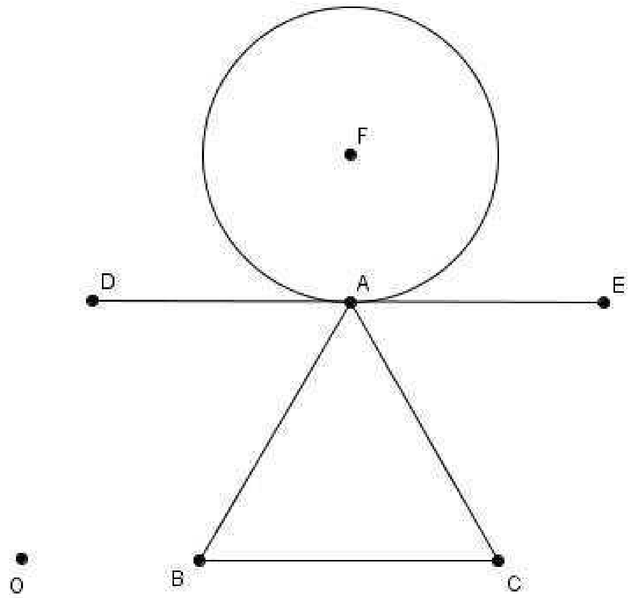
Sur la feuille annexe

1) Tracer l'image de la figure donnée par la rotation directe de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$
2) Tracer l'image de la figure donnée par l'homothétie de centre O et de rapport $-\frac{1}{2}$

ANNEXE

A rendre avec la copie

Nom : Prénom : N° : 2Sc2



Correction

Solution-Exercice 1

1- $U_{15} = U_5 + (15-5)r \Leftrightarrow -27 = 3 + 10r \Leftrightarrow -30 = 10r \Leftrightarrow r = -\frac{30}{10} \Leftrightarrow \boxed{r = -3}$

$U_5 = U_0 + 5r \Leftrightarrow 3 = U_0 - 15 \Leftrightarrow \boxed{U_0 = 18}$

2- $V_{10} = V_7 q^{10-7} \Leftrightarrow 8 = -1q^3 \Leftrightarrow q^3 = -8 = (-2)^3 \Leftrightarrow \boxed{q = -3}$

$V_7 = V_0 q^7 \Leftrightarrow -1 = V_0(-2)^7 \Leftrightarrow -1 = V_0(-128) \Leftrightarrow \boxed{V_0 = \frac{1}{128}}$

Solution-Exercice 2

1-a- $U_1 = \frac{1}{2}U_0 + 1 = \frac{1}{2} \times 3 + 1 = \frac{3}{2} + 1 = \frac{5}{2}$ $\boxed{U_1 = \frac{5}{2}}$

$U_2 = \frac{1}{2}U_1 + 1 = \frac{1}{2} \times \frac{5}{2} + 1 = \frac{5}{4} + 1 = \frac{9}{4}$ $\boxed{U_2 = \frac{9}{4}}$

b- $U_1 - U_0 = \frac{5}{2} - 3 = -\frac{1}{2}$ et $U_2 - U_1 = \frac{9}{4} - \frac{5}{2} = -\frac{1}{4}$

$U_1 - U_0 \neq U_2 - U_1$ donc (U_n) n'est pas arithmétique

D'autre part $\frac{U_1}{U_0} = \frac{\frac{5}{2}}{3} = \frac{5}{6}$ et $\frac{U_2}{U_1} = \frac{\frac{9}{4}}{\frac{5}{2}} = \frac{9}{4} \times \frac{2}{5} = \frac{9}{10}$

$\frac{U_1}{U_0} \neq \frac{U_2}{U_1}$ donc (U_n) n'est pas géométrique

2- $V_n = U_n - 2$

a- $V_{n+1} = U_{n+1} - 2 = \frac{1}{2}U_n + 1 - 2 = \frac{1}{2}U_n - 1 = \frac{1}{2}(U_n - 2) = \frac{1}{2}V_n$

Donc (V_n) est une suite géométrique de raison $q = \frac{1}{2}$

$V_0 = U_0 - 2 = 3 - 2 = 1$; $\boxed{V_0 = 1}$

b- $V_n = V_0 q^n = 1\left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{2^n}$; $\boxed{V_n = \frac{1}{2^n}}$

Comme $V_n = U_n - 2$ alors $U_n = V_n + 2$ d'où $\boxed{U_n = \frac{1}{2^n} + 2}$

3-a- puisque (V_n) est une suite géométrique de raison $q = \frac{1}{2} \neq 1$ alors $S = V_1 + V_2 + \cdots + V_8 = V_1 \frac{1-q^8}{1-q}$

Or $V_1 = \frac{1}{2^1} = \frac{1}{2}$ donc $S = \frac{1}{2}\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^8}{1-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^8}{\frac{1}{2}} = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^8 = 1 - \frac{1}{2^8} = 1 - \frac{1}{256} = \frac{255}{256}$; $\boxed{S = \frac{255}{256}}$

b- $S' = U_1 + U_2 + \cdots + U_8 = (V_1 + 2) + (V_2 + 2) + \cdots + (V_8 + 2)$

$= (V_1 + V_2 + \cdots + V_8) + \left(\underbrace{2 + 2 + \cdots + 2}_{8\,fois}\right) = S + 16 = \frac{255}{256} + 16 = \frac{4351}{256}$; $\boxed{S' = \frac{4351}{256}}$

Solution-Exercice 3

1- $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ tel que $tanx = \frac{3}{4}$

On a : $1 + tan^2x = \frac{1}{cos^2x} \Leftrightarrow 1 + \frac{9}{16} = \frac{1}{cos^2x} \Leftrightarrow \frac{25}{16} = \frac{1}{cos^2x} \Leftrightarrow cos^2x = \frac{16}{25} \Leftrightarrow cosx = \frac{4}{5}\ ou\ cosx = -\frac{4}{5}$

Or $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ donc $0 \leq cosx \leq 1$ d'où $\boxed{cosx = \frac{4}{5}}$

D'autre part $tanx = \frac{sinx}{cosx}$ donc $sinx = cosx \times tanx = \frac{4}{5} \times \frac{3}{4} = \frac{3}{5}$ ainsi $\boxed{tanx = \frac{3}{5}}$

2- $\frac{\pi}{5} + \frac{4\pi}{5} = \pi$ donc $\frac{\pi}{5}\,et\,\frac{4\pi}{5}$ sont deux angles supplémentaires d'où $cos\frac{4\pi}{5} = -cos\frac{\pi}{5}$

$\frac{2\pi}{5} + \frac{3\pi}{5} = \pi$ donc $\frac{2\pi}{5}\,et\,\frac{3\pi}{5}$ sont deux angles supplémentaires d'où $cos\frac{3\pi}{5} = -cos\frac{2\pi}{5}$

Conclusion $\boxed{cos\frac{\pi}{5} + cos\frac{2\pi}{5} + cos\frac{3\pi}{5} + cos\frac{4\pi}{5} = 0}$

3- $\frac{\pi}{12} + \frac{5\pi}{12} = \frac{\pi}{2}$ donc $\frac{\pi}{12}\,et\,\frac{5\pi}{12}$ sont deux angles complémentaires alors $sin\left(\frac{5\pi}{12}\right) = cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$

D'où $sin^2\left(\frac{\pi}{12}\right) + sin^2\left(\frac{5\pi}{12}\right) = sin^2\left(\frac{\pi}{12}\right) + cos^2\left(\frac{\pi}{12}\right) = 1$

Conclusion : $\boxed{sin^2\left(\frac{\pi}{12}\right) + sin^2\left(\frac{5\pi}{12}\right) = 1}$

Solution-Exercice 4

1- $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{1+cos\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{1-cos\frac{\pi}{2}} = 1 + 1 = 2 \; car \; cos\,\frac{\pi}{2} = 0$ $\boxed{f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2}$

$f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{1+cos\frac{\pi}{3}} + \frac{1}{1-cos\frac{\pi}{3}} = \frac{1}{1+\frac{1}{2}} + \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\frac{3}{2}} + \frac{1}{\frac{1}{2}} = \frac{2}{3} + 2 = \frac{8}{3}$ $\boxed{f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{8}{3}}$

$f\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{1+cos\frac{\pi}{6}} + \frac{1}{1-cos\frac{\pi}{6}} = \frac{1}{1+\frac{\sqrt{3}}{2}} + \frac{1}{1-\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{\frac{2+\sqrt{3}}{2}} + \frac{1}{\frac{2-\sqrt{3}}{2}} = \frac{2}{2+\sqrt{3}} + \frac{2}{2-\sqrt{3}} = \frac{2(2+\sqrt{3})+2(2-\sqrt{3})}{(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})} = \frac{8}{4-3} = 8$

$\boxed{f\left(\frac{\pi}{6}\right) = 8}$

2- $f(x) = \frac{1}{1+cosx} + \frac{1}{1-cosx} = \frac{1-cosx+1+cosx}{(1+cosx)(1-cosx)} = \frac{2}{1-cos^2x} = \frac{2}{sin^2x}$ car $sin^2x + cos^2x = 1$

3- $f(x) = 4 \Leftrightarrow \frac{2}{sin^2x} = 4 \Leftrightarrow sin^2x = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow sinx = \frac{\sqrt{2}}{2} \; ou \; sinx = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ comme pour tout $x \in \,]0,\pi[$,

$0 \leq sinx \leq 1$ alors $sinx = \frac{\sqrt{2}}{2}$ d'où $\boxed{x = \frac{\pi}{4}}$ ou $\boxed{x = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}}$

Solution-Exercice 5