



**Exercice 1 (4 points)**

- 1) Soit  $x \in \left[\frac{\pi}{2}; \pi\right]$ , calculer  $\cos x$  sachant que  $\sin x = \frac{4}{5}$
- 2) Montrer que la suite  $(u_n)$  définie par  $u_n = 3^{2n+3} - 9^n$  est géométrique
- 3) Calculer  $\cos \frac{\pi}{5} + \cos \frac{2\pi}{5} + \cos \frac{3\pi}{5} + \cos \frac{4\pi}{5}$
- 4) Montrer que pour tout entier naturelle  $n$ ,  $(n + 2)$  divise  $3n^2 + 7n + 2$
- 5) Déterminer tout les entiers naturels  $n$  tel que  $\frac{n + 16}{n + 1}$  soit entier

**Exercice 2(5 points)**

Soit  $n \in \mathbb{N}$ , on considère la suite  $(u_n)$  définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = 3u_n + 1, n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

- 1) a) Calculer  $u_1$  et  $u_2$
- b) Vérifier que la suite  $(u_n)$  n'est ni arithmétique ni géométrique
- 2) Soit la suite  $(v_n)$  définie sur  $\mathbb{N}$  par:  $v_n = u_n + \frac{1}{2}$ 
  - a) Calculer  $v_0$
  - b) Montrer que  $(v_n)$  est une suite géométrique de raison 3
  - c) Exprimer alors en fonction de  $n$ ,  $v_n$  et  $u_n$
- 3) a) Calculer en fonction de  $n$ ,  $S = 1 + 3 + 3^2 + \dots + 3^n$
- b) Montrer que 2 divise  $3^{n+1} - 1$
- c) En déduire que  $u_n$  est un entier naturel.
- d) Montrer que pour tout entier naturelle  $n$ ;  $u_n$  et  $u_{n+1}$  sont premiers entre eux

### Exercice 3 (5 points)

Soient  $(u_n)$  et  $(v_n)$  deux suites définies sur  $\mathbb{N}$  respectivement par

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \frac{1}{2 - u_n}, n \in \mathbb{N} \end{cases} \quad \text{et} \quad v_n = \frac{1}{u_n - 1}$$

On vous admet que  $u_n \in \mathbb{R} \setminus \{1; 2\}$  pour tout entier naturel  $n$

- 1) Calculer  $u_1, u_2, v_0$  et  $v_1$
- 2) a) Montrer que  $(v_n)$  est une suite arithmétique de raison  $-1$ .  
b) Donner l'expression de  $v_n$  puis de  $u_n$  en fonction de  $n$ .
- 3) Pour  $n \geq 1$ , on pose  $S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_{n-1}$  et  $P_n = 2^{v_0} \times 2^{v_1} \times \dots \times 2^{v_{n-1}}$ 
  - a) Calculer  $S_n$  en fonction de  $n$ .
  - b) En déduire l'expression de  $P_n$  en fonction de  $n$ .

### Exercice 4 (6 points)

Soit ABC un triangle tel que  $AC = 6$ ,  $\widehat{ABC} = \frac{\pi}{4}$  et  $\widehat{ACB} = \frac{\pi}{3}$

- 1) On appliquant la loi de sinus montrer que  $AB = 3\sqrt{6}$
- 2) a) Résoudre dans  $\mathbb{R}_+$  l'équation  $x^2 - 6x - 18 = 0$   
b) En déduire en appliquant le théorème d'El-Kashi montrer que  $BC = 3(1 + \sqrt{3})$   
c) Calculer l'aire du triangle ABC.
- 3) Montrer que  $\widehat{BAC} = \frac{5\pi}{12}$
- 4) Soit  $\mathcal{C}$  cercle circonscrit au triangle ABC
  - a) Calculer  $R$  le rayon de  $\mathcal{C}$ .
  - b) En déduire que  $\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$
  - c) Calculer  $\left(\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}\right)^2$
  - d) En déduire  $\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right)$  et  $\tan\left(\frac{5\pi}{12}\right)$