

Exercice N° 1 : (7 points)

1. Résoudre dans \mathbb{R} les inéquations suivantes :

a) $(3-x)(2+x)(1-x) < 0$; b) $\frac{3+x}{1-x} \leq 2$; c) $\sqrt{2-x} \leq 1$.

2. On considère l'équation suivante : $\frac{2}{x^2-25} = \frac{1}{x-5}$.

a) Préciser le domaine d'existence de cette équation.

b) Résoudre cette équation.

Exercice N° 2 : (3 points)

ABCD est un carré de côté 4. M est un point quelconque de [DC].

N est le point de [AD] tel que $DM = AN = x$

Où x est un nombre réel de l'intervalle $[0 ; 4]$.

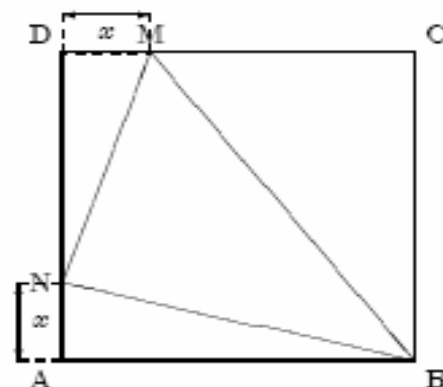
1. Calculer l'aire des triangles DMN et ABN en fonction de x .

2. On note \mathcal{A} , l'aire du triangle BMN. Démontrer que :

$$\mathcal{A} = \frac{x^2 - 4x + 16}{2}$$

3. Démontrer que pour tout $x \in [0;4]$: $\mathcal{A} = \frac{(x-2)^2 + 12}{2}$.

4. Déterminer, si elles existent, les valeurs de x pour les quelles : $\mathcal{A} < 8$.



Exercice N° 3 : Q.C.M. : (2 points)

Si m désigne un réel, le barycentre de (A, 3m) et (B, 5m-2) n'existe que si	$m \neq 1$	$m \neq 0$	$m \neq \frac{1}{4}$
Le barycentre de (A, 2) et (B, 3) est le point G tel que	$\vec{AG} = \frac{3}{2} \vec{AB}$	$2\vec{GA} = 3\vec{GB}$	$5\vec{AG} = 3\vec{AB}$
Le barycentre de (B, 1) et (C, -2) est	Le symétrique de C par rapport à B	Le symétrique de B par rapport à C	Sur le segment [BC]
Le barycentre de (A, 0) et (B, 3) est le point	A	B	n'existe pas

Exercice N° 4 : (8 points)

Soit ABC un triangle, I et J les points définis par $\vec{AI} = \frac{2}{3} \vec{AC}$ et $\vec{AJ} = 3\vec{AB}$.

On note G le symétrique de B par rapport à I.

1. Construire chacun des points I, G et J.

2. a) Montrer que $\vec{GB} = 2\vec{GA} + \frac{4}{3} \vec{AC}$

b) En déduire que G est le barycentre de (A,2) (B, -3) et (C,4).

3. a) Vérifier que J est le barycentre des points pondérés (A, 2) et (B, -3).

b) En déduire que les points G, C et J sont alignés.

4. Déterminer et construire l'ensemble des points M du plan tels que : $\|2\vec{MA} - 3\vec{MB}\| = AB$.

Exercice N° 1 :

1. a) $(3-x)(2+x)(1-x) < 0$

$S_{\mathbb{R}} =]-\infty, -2[\cup]1, 3[.$

x	$-\infty$	-2	1	3	$+\infty$		
3-x	+	+	+	0	-		
2+x	-	0	+	+	+		
1-x	+	+	0	-	-		
Produit	-	0	+	0	-	0	+

b) $\frac{3+x}{1-x} \leq 2.$

Condition : $1-x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 1.$

Résolution :

$\frac{3+x}{1-x} \leq 2 \Leftrightarrow \frac{3+x}{1-x} - 2 \leq 0$

$\Leftrightarrow \frac{3+x-2(1-x)}{1-x} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{1+3x}{1-x} \leq 0$

$S_{\mathbb{R}} =]-\infty, -\frac{1}{3}] \cup]1, +\infty[.$

x	$-\infty$	$-\frac{1}{3}$	1	$+\infty$
1+3x	-	0	+	+
1-x	+	+	0	-
$\frac{1+3x}{1-x}$	-	0	+	-

c) $\sqrt{2-x} \leq 1.$

Condition : $2-x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 2 \Leftrightarrow x \in]-\infty, 2]$

Résolution :

$\sqrt{2-x} \leq 1 \Leftrightarrow (\sqrt{2-x})^2 \leq 1^2 \Leftrightarrow 2-x \leq 1 \Leftrightarrow x \geq 1 \Leftrightarrow x \in [1, +\infty[$

$S_{\mathbb{R}} =]-\infty, 2] \cup [1, +\infty[= [1, 2].$

2. $\frac{2}{x^2-25} = \frac{1}{x-5}.$

a) L'équation a un sens si et seulement si $\begin{cases} x^2 - 25 \neq 0 \\ x - 5 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 \neq 25 \\ x \neq 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq \pm 5 \\ x \neq 5 \end{cases}$

Le domaine d'existence de cette équation est $\mathbb{R} \setminus \{-5, 5\}.$

b) $\frac{2}{x^2-25} = \frac{1}{x-5} \Leftrightarrow x^2 - 25 = 2(x-5) \Leftrightarrow (x-5)(x+5) = 2(x-5) \Leftrightarrow (x-5)(x+5) - 2(x-5) = 0$

$\Leftrightarrow (x-5)(x+5-2) = 0 \Leftrightarrow (x-5)(x+3) = 0 \Leftrightarrow x = 5$ (Valeur interdite) ou $x = -3$

$S_{\mathbb{R}} = \{-3\}.$

Exercice N° 2 :

$$1. * \mathcal{A}(\text{DMN}) = \frac{x(4-x)}{2}.$$

$$* \mathcal{A}(\text{ABN}) = \frac{4x}{2} = 2x.$$

$$2. \mathcal{A} = \mathcal{A}(\text{ABCD}) - [\mathcal{A}(\text{DMN}) + \mathcal{A}(\text{ABN}) + \mathcal{A}(\text{CBM})]$$

$$= 16 - \left[\frac{x(4-x)}{2} + 2x + \frac{4(4-x)}{2} \right]$$

$$= 16 - \left[\frac{(x+4)(4-x) + 4x}{2} \right] = 16 - \left(\frac{16-x^2+4x}{2} \right) =$$

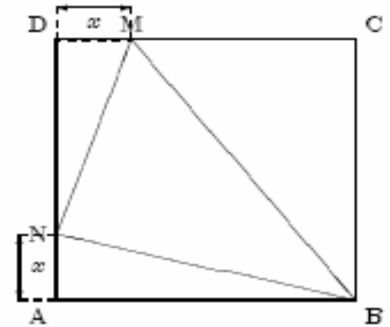
$$\frac{x^2 - 4x + 16}{2}.$$

$$3. \frac{(x-2)^2 + 12}{2} = \frac{x^2 - 4x + 4 + 12}{2} = \frac{x^2 - 4x + 16}{2} = \mathcal{A}.$$

$$4. \mathcal{A} < 8 \Leftrightarrow \frac{(x-2)^2 + 12}{2} < 8 \Leftrightarrow (x-2)^2 + 12 < 16 \Leftrightarrow (x-2)^2 < 4 \Leftrightarrow |x-2| < 2 \Leftrightarrow -2 < x-2 < 2$$

$$\Leftrightarrow 0 < x < 4$$

Ainsi $\mathcal{A} < 8 \Leftrightarrow x \in]0, 4[.$



Exercice N° 3 : Q.C.M. :

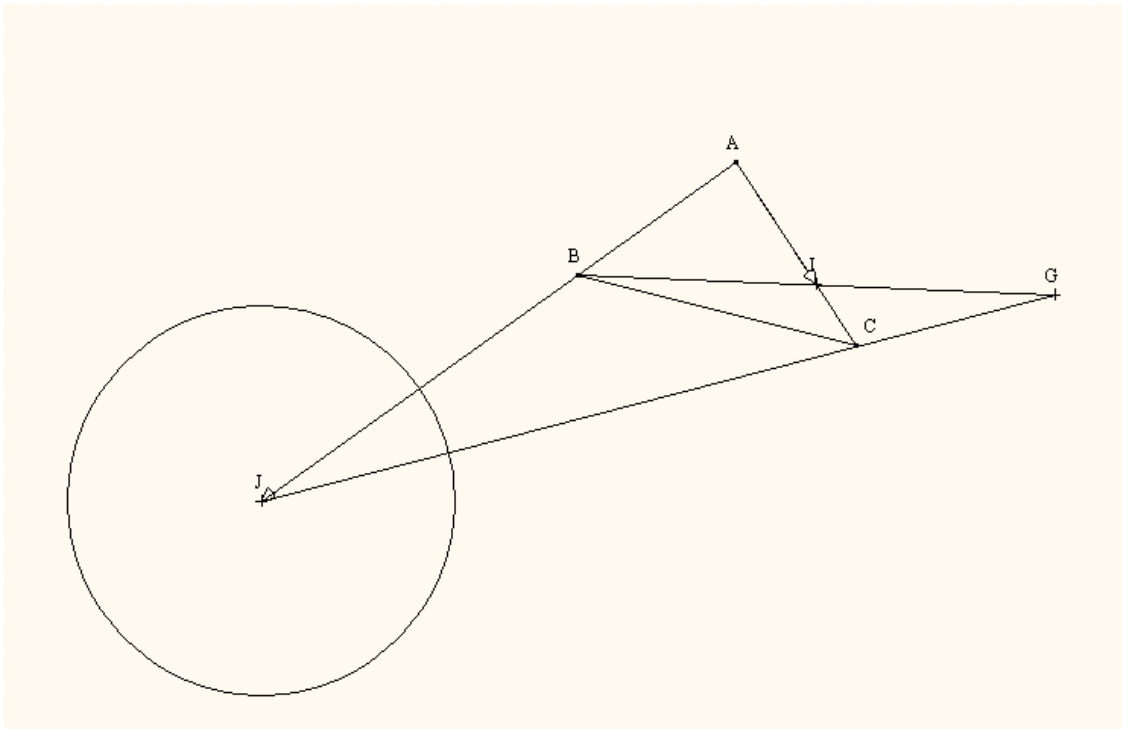
Si m désigne un réel, le barycentre de (A, 3m) et (B, 5m-2) n'existe que si	$m \neq 1$	$m \neq 0$	$m \neq \frac{1}{4}$
Le barycentre de (A, 2) et (B, 3) est le point G tel que	$\vec{AG} = \frac{3}{2} \vec{AB}$	$2\vec{GA} = 3\vec{GB}$	$5\vec{AG} = 3\vec{AB}$
Le barycentre de (B, 1) et (C, -2) est	Le symétrique de C par rapport à B	Le symétrique de B par rapport à C	Sur le segment [BC]
Le barycentre de (A, 0) et (B, 3) est le point	A	B	n'existe pas

Exercice N° 4 :

Soit ABC un triangle, I et J les points définis par $\vec{AI} = \frac{2}{3} \vec{AC}$ et $\vec{AJ} = 3\vec{AB}$.

On note G le symétrique de B par rapport à I.

1.



2. a) $\overrightarrow{GB} = 2\overrightarrow{GI} \Leftrightarrow \overrightarrow{GB} = 2(\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AI}) = 2\overrightarrow{GA} + 2\overrightarrow{AI} = 2\overrightarrow{GA} + 2 \times \frac{2}{3}\overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{GA} + \frac{4}{3}\overrightarrow{AC}.$

b) D'après a), on a : $3\overrightarrow{GB} = 6\overrightarrow{GA} + 4\overrightarrow{AC} = 6\overrightarrow{GA} + 4(\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{GC}) = 2\overrightarrow{GA} + 4\overrightarrow{GC} \Rightarrow 2\overrightarrow{GA} - 3\overrightarrow{GB} + 4\overrightarrow{GC} = \vec{0}.$
 $\Rightarrow G$ est le barycentre des points pondérés (A,2) (B, -3) et (C,4).

3. a) $\overrightarrow{AJ} = 3\overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \overrightarrow{AJ} = 3(\overrightarrow{AJ} + \overrightarrow{JB}) \Leftrightarrow 2\overrightarrow{JA} - 3\overrightarrow{JB} = \vec{0}.$ D'où J est le barycentre des points (A, 2) et (B, -3).

b) $2\overrightarrow{GA} - 3\overrightarrow{GB} + 4\overrightarrow{GC} = \vec{0}$ et $2\overrightarrow{JA} - 3\overrightarrow{JB} = \vec{0} \Rightarrow -\overrightarrow{GJ} + 4\overrightarrow{GC} = \vec{0} \Rightarrow \overrightarrow{GJ} = 4\overrightarrow{GC} \Rightarrow G, C$ et J sont alignés.

4. $\|2\overrightarrow{MA} - 3\overrightarrow{MB}\| = AB \Leftrightarrow \|-\overrightarrow{MJ}\| = AB \Leftrightarrow JM = AB \Leftrightarrow M \in \zeta_{(J, AB)}.$