

Devoir de contrôle n°02

Durée : 1 H

Exercice n°1 : (10 pts)

On donne un repère orthonormé (O, \vec{u}, \vec{v}) du plan .

1° - Placer les points D, E, F et G tels que : $\vec{OD} = -\vec{u} - 2\vec{v}$, $\vec{OE} = -3\vec{u}$, $\vec{OF} = 2\vec{u} - \vec{v}$, $\vec{OG} = 4\vec{u} - 3\vec{v}$

2° - Quelle est la nature du quadrilatère EDGF .

3° - a) Montrer que les vecteurs \vec{OD} et \vec{OF} sont orthogonaux .

b) Calculer OD et OF .

c) En déduire la nature du triangle ODF .

4° - Expliquer pourquoi le point $I\left(\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}\right)$ est le centre d'un cercle passant par les points O , D et F

puis calculer le rayon de ce cercle .

5° - Soit K le point tel que : $\vec{OK} = \vec{OD} + \vec{OE} + \vec{OF} + \vec{OG}$

a) Calculer les composantes du vecteur \vec{OK} .

b) Montrer que les points O , I et K sont alignés.

Exercice 3 : (10 pts)

Partie A

On donne $A(x) = -3x^2 + 5x + 8$.

1° - Résoudre dans \mathbb{R} l'inéquation $A(x) \geq 0$.

2° - En déduire le signe de chacune des expressions suivantes : $A(-555)$, $A(2,447)$ et $A(9999)$.

3° - Factoriser $A(x)$.

4° - Soit $B(x) = \frac{A(x)}{x^2 + (1 + \sqrt{2})x + \sqrt{2}}$.

a) Pour quelles valeurs de x , B(x) est - elle définie ?

b) Simplifier B(x) .

c) Résoudre dans \mathbb{R} l'équation $B(x) = x - \sqrt{2}$.

Partie B

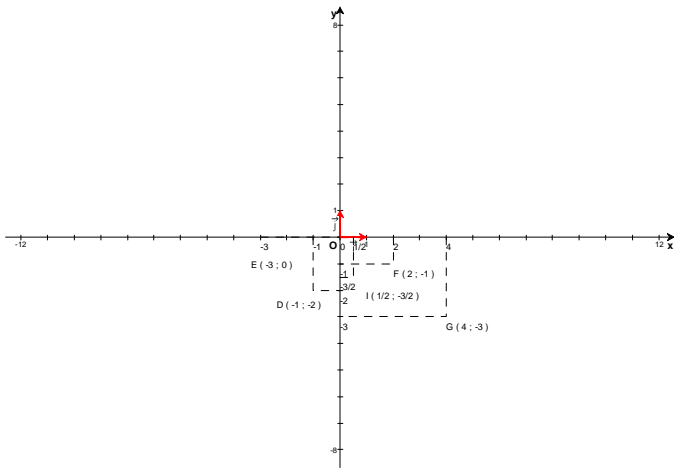
Répondre par vrai ou faux

1°/	Soient $a \in \mathbb{R}^*$ et $b \in \mathbb{R}$ L'équation $(E_1) : ax^2 + bx - a = 0$ admet deux racines distinctes de signes contraires
2°/	Soit $a \in \mathbb{R}_+$ L'équation $(E_2) : ax^2 + 5x + \frac{6}{a} = 0$ admet deux racines distinctes et positives

Corrigé

Exercice n°01 :

1°-



2°- On a : $\vec{EF} \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\vec{DG} \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \end{pmatrix}$, c'est à dire $\vec{EF} = \vec{DG}$

alors le quadrilatère EDGF est parallélogramme.

3°- a) On a : $\vec{OD} \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix}$ et $\vec{OF} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

$xx' + yy' = (-1).2 + (-2).(-1) = 0$, alors $\vec{OD} \perp \vec{OF}$ (1)

b) $OD = OF = \sqrt{5}$ (2)

c) D'après (1) et (2), le triangle ODF est isocèle et rectangle en O.

4°- Le triangle ODF étant rectangle en O et $I = D * F$ donc I est le centre du cercle circonscrit à ce

triangle, tels que $R = OI = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{3}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{10}}{2}$

5°-a) $\vec{OK} = 2\vec{u} - 6\vec{v}$, donc $\vec{OK} \begin{pmatrix} 2 \\ -6 \end{pmatrix}$

b) $\det(\vec{OK}, \vec{OI}) = \begin{vmatrix} 2 & \frac{1}{2} \\ -6 & -\frac{3}{2} \end{vmatrix} = 2 \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) - \frac{1}{2} \cdot (-6) = 0$

donc \vec{OK} et \vec{OI} sont colinéaires et ayant le point commun O, alors les points O, I et K sont alignés.

Exercice n°02 :

Partie A

$$1^\circ - A(x) = 0 \Leftrightarrow -3x^2 + 5x + 8 = 0$$

$$\Rightarrow a = -3, b = 5 \text{ et } c = 8, \text{ donc } a - b + c = 0$$

$$\Rightarrow x' = -1 \text{ et } x'' = -\frac{c}{a} = \frac{8}{3}, \text{ et par suite on a :}$$

$$\begin{array}{ccccccc} x & -\infty & & -1 & & \frac{8}{3} & +\infty \\ -3x^2 + 5x + 8 & & - & 0 & + & 0 & - \end{array}$$

$$\text{Enfin } S_{\mathbb{R}} = \left[-1, \frac{8}{3} \right]$$

2°- D'après ce qui précède, on a :

- $-555 \notin \left[-1, \frac{8}{3} \right] \Rightarrow A(-555) < 0$
- $2,447 \in \left[-1, \frac{8}{3} \right] \Rightarrow A(2,447) > 0$
- $9999 \notin \left[-1, \frac{8}{3} \right] \Rightarrow A(9999) < 0$

$$3^\circ - \text{D'après } (1^\circ), A(x) = -3\left(x - \frac{8}{3}\right)(x + 1) = (-3x + 8)(x + 1)$$

$$4^\circ - \text{a) Soit } x^2 + (1 + \sqrt{2})x + \sqrt{2} = 0$$

$$\Rightarrow a = 1, b = 1 + \sqrt{2} \text{ et } c = \sqrt{2}, \text{ donc } a - b + c = 0$$

$$\Rightarrow x' = -1 \text{ et } x'' = -\frac{c}{a} = -\sqrt{2}, \text{ et par suite}$$

$$B(x) \text{ est définie pour } x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, -\sqrt{2}\}$$

$$\text{b) On a } x^2 + (1 + \sqrt{2})x + \sqrt{2} = (x + \sqrt{2})(x + 1)$$

ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, -\sqrt{2}\}$:

$$\begin{aligned} B(x) &= \frac{A(x)}{x^2 + (1 + \sqrt{2})x + \sqrt{2}} = \frac{(-3x + 8)(x + 1)}{(x + \sqrt{2})(x + 1)} \\ &= \frac{-3x + 8}{x + \sqrt{2}}. \end{aligned}$$

$$\text{c) } \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, -\sqrt{2}\}$$

$$B(x) = x - \sqrt{2} \Leftrightarrow \frac{-3x + 8}{x + \sqrt{2}} = x - \sqrt{2}$$

$$\Leftrightarrow (-3x + 8) = (x + \sqrt{2})(x - \sqrt{2})$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 3x - 10 = 0$$

$$\Rightarrow a = 1, b = 3 \text{ et } c = -10 \Rightarrow \Delta = b^2 - 4ac = 49$$

$$\Rightarrow x' = 2 \text{ et } x'' = -5, \text{ finalement } S_{\mathbb{R}} = \{2, -5\}$$

Partie B

1°- Vraie

En effet , $a \times c = -a^2 < 0$ donc (E_1) admet deux racines distinctes x' et x'' , et comme

$x' \cdot x'' = \frac{c}{a} = \frac{-a}{a} = -1 < 0$ alors x' et x'' sont de signes contraires.

2°- Faux

En effet , $\Delta = 1 > 0$ donc (E_2) admet deux racines distinctes x' et x'' , et comme

$x' \cdot x'' = \frac{c}{a} = \frac{6}{a^2} > 0$ alors x' et x'' sont de meme signes

De plus, $x' + x'' = -\frac{b}{a} = -\frac{5}{a} < 0$,car $a \in \mathbb{R}_+^*$

D'ou x' et x'' sont négatives.