Classes : 2eme SC **Mathématiques**	**Devoir de Synthèse n°1**	*Prof : Mr Samaali* *Durée : 2H* *Mercredi 09 -12 2009*

1er Exercice : (5 points)

Partie I

Pour chacune des questions suivantes cocher la ou les bonne(s) réponse(s)

1- soit (U_n) une suite arithmétique de premier terme $U_0 = -3$ et de raison r tel que $U_{19} = 35$

☐ $U_{21} = 41$ ☐ $U_{21} = 39$ ☐ $r = 2$

2 - soit (U_n) une suite réelle telle que $U_n = 2$; $pour\ tout\ n \in \mathbb{N}$

☐ (U_n) une suite arithmétique de premier terme $U_0 = 2$ et de raison $r = 0$.

☐ (U_n) une suite arithmétique de premier terme $U_0 = 2$ et de raison $r = 1$.

3 – On considère l'équation (E) :$3x^2 + 4x - 7 = 0$

☐ (E) admet deux racines distinctes de mêmes signes.

☐ $3x^2 + 4x - 7 \leq 0$ équivaut à $x \in \left[\frac{-7}{3}; 1\right]$

Partie II

Répondre par « vrai » ou « faux » aux assertions suivantes :

1- Dans le plan muni du repère orthonormé $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$ on considère les points

$A(2 ;1)$;$B(3 ; 4)$ et $C(-2 ; -11)$.

a - Les points A ; B et C sont alignés.

b - Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont orthogonaux

c - Pour tout point M on a : $-5\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC} + 4\overrightarrow{MB} = \vec{O}$.

2 - O est le centre de gravité d'un triangleEFG.

a - $\overrightarrow{OE} + \overrightarrow{OF} + \overrightarrow{OG} = \vec{O}$

b - pour tout point M du plan on a :$\overrightarrow{ME} + \overrightarrow{MF} + \overrightarrow{MG} = 3\overrightarrow{MO}$

2^{eme} EXERCICE : (9 points)

On les expressions suivantes : $A(x) = x^2 + x - 6$ *et* $B(x) = 2x^2 - 3x + 4$

1) a) Résoudre dans $\mathbb{R}$: $A(x) = 0$; puis dresser le tableau de signe de l'expression $A(x)$

b) Préciser la position du réel $\mathbf{1}$ par rapport aux racines de $A(x) = 0$

c) Déduire l'ensemble des solutions de l'équation $x^4 + x^2 - 6 = 0$

2) a) Montrer que : $B(x) > 0$ pour tout réel x

b) On pose $f(x) = {A(x)}/{B(x)}$

c) Déterminer l'ensemble des réels x pour lesquels $f(x)$ est bien définie

d) Déduire des questions précédentes l'ensemble des solutions de l'inéquation: $f(x) \geq 0$.

3) Résoudre dans $\mathbb{R}$:$\sqrt{B(x)} > |x-2|$, puis $\sqrt{B(x)} \geq x - 2$.

3^{eme} EXERCICE : (6 points)

(On ne demande pas de faire une figure)

Soit $ABCD$ un trapèze de bases $[AB]$ et $[CD]$.

Soient E et F les deux points définis comme suit :

$2\overrightarrow{FA} + 5\overrightarrow{FB} = \vec{O}$ et $3\overrightarrow{EC} + 4\overrightarrow{ED} = \vec{O}$

1) Montrer que : $\overrightarrow{AF} = \left({5}/{7}\right)\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CE} = \left({4}/{7}\right)\overrightarrow{CD}$.

2) Soit G le milieu du segment $[EF]$

Montrer que :$2\overrightarrow{GA} + 5\overrightarrow{GB} + 3\overrightarrow{GC} + 4\overrightarrow{GD} = \vec{O}$

3) Soit M un point et $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs tels que :

$$\vec{u} = 2\overrightarrow{MA} + 5\overrightarrow{MB} + 3\overrightarrow{MC} + 4\overrightarrow{MD} \quad \text{et} \quad \vec{v} = 2\overrightarrow{MA} + 5\overrightarrow{MB} - 3\overrightarrow{MC} - 4\overrightarrow{MD}$$

a) Exprimer $\vec{u}$ en fonction de $\overrightarrow{MG}$

b) Montrer que $\vec{v} = 7\overrightarrow{FE}$

c) Déterminer l'ensemble des points M tel que :$\|\vec{u}\| = \|\vec{v}\|$

Correction du devoir de synthèse N°1

1er Exercice : **PARTIE I**

1- $U_{21} = 39$ *et* $r = 2$

2- *On a* $U_n = 2$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$ *donc* $U_{n+1} = U_n = 2 = U_0$
Donc $U_{n+1} - U_n = 0$
Donc (U_n) *est une suite arithmétique de raison* $r = 0$ *et de 1er terme* $U_0 = 2$

3- *On considère l'équation* $(E) : 3x^2 + 4x - 7 = 0$
On a $3 \times (-7) < 0$ *Donc* (E) *admet deux racines et de signes contraires*
D'où la 1ere réponse est fausse, il reste à vérifier la 2eme
On résout l'équation (E)*.On remarque que* $3 + 4 - 7 = 0$ *donc 1 est racine et la 2eme racine est égale à* $\left(-7/3\right)$ *.Le tableau de signe de* $3x^2 + 4x - 7$ *est le suivant :*

x	$-\infty$	$-7/3$	1	$+\infty$
$3x^2 + 4x - 7$	+	-	+	

D'après le tableau en déduit : $3x^2 + 4x - 7 \leq 0$ *équivaut à* $x \in \left[-7/3 ; 1\right]$

Partie II

On a : $\overrightarrow{AB}\binom{1}{3}$ *et* $\overrightarrow{AC}\binom{-4}{-12}$ $\overrightarrow{AC} = -4\overrightarrow{AB}$ *d'où les points* $A ; B$ *et* C *sont alignés, et par suite* *a) vrai et de plus la réponse b) est fausse*

c) $-5\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC} + 4\overrightarrow{MB} = -5\overrightarrow{MA} + (\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AC}) + 4(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB})$

$$= \underbrace{\left(-5\overrightarrow{MA} + 5\overrightarrow{MA}\right)}_{\vec{0}} + \underbrace{\overrightarrow{AC} + 4\overrightarrow{AB}}_{\vec{0}} = \vec{0}$$

Car $\overrightarrow{AC} = -4\overrightarrow{AB}$

D'où la réponse c) vrai

2- a) vrai (voir cours). b) vrai, il suffit d'introduire le point O *et utiliser la relation de CHASLES.*

2eme Exercice :

1) *a) On a* $A(x) = x^2 + x - 6$, $A(x) = 0$ *équivaut à* $x^2 + x - 6 = 0$

On remarque que la somme (resp : somme alternée) des coefficients est non nulle

Donc il faut calculer le discriminant $\Delta = 1 - 4 \times (-6) = 25 = 5^2 > 0$

Donc les racines sont : $x_1 = \frac{-1+5}{2} = 2$ *et* $x_2 = \frac{-1-5}{2} = -3$

ainsi $S_{\mathbb{R}} = \{-3 ; 2\}$*.Donc le tableau de signe est le suivant :*

x	$-\infty$	-3	1	$+\infty$
$x^2 + x - 6$	+	-	+	

b) évident que $-3 \leq 1 \leq 2$. *c) (*) :* $x^4 + x^2 - 6 = 0$ *équivaut à* $(x^2)^2 + x^2 - 6 = 0$

On pose $y = x^2$ *donc* $x^4 + x^2 - 6 = 0$ *équivaut à* $y^2 + y - 6 = 0$

D'après 1) a) on déduit que les racines de à $y^2 + y - 6 = 0$ *sont* -3 *et* 2

Mais $y = x^2 \geq 0$ *donc on conserve que la solution positive. D'où* $y = 2$

Donc $x^2 = 2$ *ç-à-d. dire* $x = \sqrt{2}$ *ou* $x = -\sqrt{2}$. *Il en résulte* $S^{(*)}{}_{\mathbb{R}} = \{-\sqrt{2}\,;\,\sqrt{2}\}$

2)a) Montrons que : $B(x) > 0$ *pour tout réel x*

On a $B(x) = 2x^2 - 3x + 4$. *Résolvons l'équation* $B(x) = 2x^2 - 3x + 4 = 0$

On remarque que la somme (resp : somme alternée) des coefficients est non nulle

Donc il faut calculer le discriminant $\Delta = 9 - 4 \times 2 \times 4 = 9 - 16 = -7 < 0$

Donc $B(x)$ *garde un signe constant qui est celui de 2 , d'où* $B(x) > 0$ *pour tout réel x*

b) $f(x)$ *est bien définies ssi* $B(x) \neq 0$ *or* $B(x) > 0$ *pour tout réel x*

donc $f(x)$ *est bien définies ssi* $x \in \mathbb{R}$

c) Puisque $B(x) > 0$ *alors le signe de* $f(x)$ *est celui de* $A(x)$

Donc $f(x) \geq 0$ *équivaut à* $A(x) \geq 0$ *équivaut à* $x \in]-\infty; -3] \cup [2, +\infty[$

3) $\sqrt{B(x)} > |x - 2|$ *équivaut à* $B(x) > (x - 2)^2$

$$\text{équivaut à} \quad 2x^2 - 3x + 4 > x^2 - 4x + 4$$

$$\text{équivaut à} \quad x^2 + x > 0 \quad \text{équivaut à } x(x+1) > 0$$

on dresse le tableau de signe

		-1	0
$x + 1$	-	+	+
x	-	-	+
Signe du produit	+	-	+

Don c $\sqrt{B(x)} > |x - 2|$ *équivaut à* $]-\infty, -1[\cup]0; +\infty[$

**) Pour l'inéquation* $\sqrt{B(x)} \geq x - 2$ *,on distingue 2 cas : * si* $x - 2 \geq 0$ *alors l'ensemble des solutions est :* $]-\infty, -1[\cup]0; +\infty[$ *,*si* $x - 2 < 0$ *alors l'ensemble des solutions est* $\mathbb{R}$

<u>Conclusions</u> *: l'ensemble des solutions est :* $]-\infty, -1[\cup]0; +\infty[$