

EXERCICE 1 : (3 POINTS)

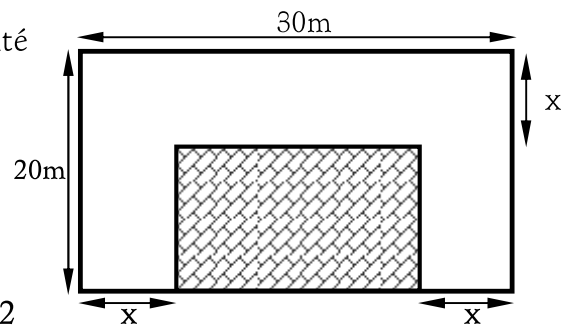
Répondre par « vrai ou faux » à chacune des questions suivantes sans justifier ta réponse

- 1- les deux vecteurs $\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ sont orthogonaux .
- 2- si ABCD est un parallélogramme ; alors le point D est barycentre du système $\{(A,1);(B,-1);(C,1)\}$
- 3- si P et Q deux polynômes tels que $d^{\circ}P=5$ et $d^{\circ}Q=3$; alors $d^{\circ}(P-Q)=2$
- 4- le polynôme $P(x)=x^5-x^3+2x^2-2$ est factorisable par (x^2-1)

EXERCICE 2 : (3 POINTS)

Une personne achète un terrain rectangulaire de 600 m^2 pour y construire sa maison.

Le plan de construction de la maison sur le terrain est représenté par la figure ci contre (la partie hachurée désigne la maison)



- 1- résoudre dans \mathbb{R} l'équation suivante : $2x^2 - 70x + 348 = 0$
- 2- Déterminer l'aire de la maison en fonction de x
- 3- Pour quelle valeur de x l'aire de la maison est-elle égale à 252

EXERCICE 3 : (6 POINTS)

- 1- résoudre dans \mathbb{R} l'équation suivante : $x^2 - x - 20 = 0$
- 2- a vérifier que 1 est une racine du polynôme $P(x) = x^3 - 2x^2 - 19x + 20$
b- Déterminer une factorisation de P
- 3- a- donner le tableau du signe de P(x) puis résoudre dans \mathbb{R} l'inéquation $x^3 - 2x^2 - 19x + 20 \geq 0$
b- vérifier sans utiliser le calculatrice que $P(0,9999) > P(1,0001)$. justifier ta réponse
- 4- résoudre dans \mathbb{R} l'inéquation $\sqrt{x^3 - 2x^2 - 19x + 20} \leq x\sqrt{x-2}$

EXERCICE 4 : (8 POINTS)

ABC est un triangle isocèle en A, $AB = AC = 5$; $BC = 8$; $I = B * C$ et G est le centre de gravité de ABC.

- 1- Faire une figure puis calculer AI et AG
- 2- Montrer que G est le barycentre des points pondérés (A , 1) (I , 2)
- 3- On appelle H le barycentre de (A , 1) et (I , 2) et (B , 3).
Montrer que H est le milieu de [GB]. Construire H.
- 4- Soit \mathcal{E} l'ensemble des points M du plan tels que $\|\overline{MA} + 2\overline{MI} + 3\overline{MB}\| = \|\overline{MA} + 2\overline{MI} - 3\overline{MB}\|$
a- Montrer que B appartient à \mathcal{E}
b- déterminer l'ensemble \mathcal{E} et construire \mathcal{E} .
- 5- a- construire le point D tel que ABDC est un parallélogramme
b- montrer que $\overline{DG} = \frac{2}{3}\overline{DB} + \frac{2}{3}\overline{DC}$
c- en déduire que G est barycentre des points D, B et C affectés des coefficients que l'on déterminera
d- calculer DG

CORRECTION DE DEVOIR DE SYNTHESE N° 1

EXERCICE 1 : vraie ou faux

1-les deux vecteurs $\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ sont orthogonaux : **VRAI**

justification $(1 \times 2) + (-2 \times 1) = 2 - 2 = 0$

2- si ABCD est un parallélogramme ; alors le point D est barycentre du système $\{(A,1);(B,-1);(C,1)\}$ **VRAI**

justification

$$\frac{-1}{1-1+1} \overline{AB} + \frac{1}{1-1+1} \overline{AC} = -\overline{AB} + \overline{AC} = \overline{BA} + \overline{AC} = \overline{BC} \text{ Et puisque ABCD est un parallélogramme on a } \overline{BC} = \overline{AD}$$

$$\text{Donc } \overline{AD} = \frac{-1}{1-1+1} \overline{AB} + \frac{1}{1-1+1} \overline{AC} \text{ et par suite le point D est barycentre du système } \{(A,1);(B,-1);(C,1)\}$$

3- si P et Q deux polynômes : $d^{\circ}P = 5$ et $d^{\circ}Q = 3$; alors $d^{\circ}(P-Q) = 2$: **FAUX**

justification on considère $P(x) = x^5$ et $Q(x) = x^3$, $P(x) - Q(x) = x^5 - x^3$ et $d^{\circ}(P-Q) = 5$

4- le polynôme $P(x) = x^5 - x^3 + 2x^2 - 2$ est factorisable par $(x^2 - 1)$: **VRAI**

justification $P(1) = 0$ et $P(-1) = 0$, donc $P(x)$ est factorisable par $(x-1)$ et $(x+1)$ donc factorisable par $(x-1) \times (x+1) = x^2 - 1$

EXERCICE 2 -E : $2x^2 - 70x + 348 = 0$, $\Delta = b^2 - 4ac = (-70)^2 - 4 \times 2 \times 348 = 4900 - 2784 = 2116 > 0$. E admet deux solutions

$$x' = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{70 - 46}{4} = \frac{24}{4} = 6 \quad ; \quad x'' = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{70 + 46}{4} = \frac{116}{4} = 29 \quad \text{donc } S_{\mathbb{R}} = \{6; 29\}$$

2- l'aire **A** de la maison en fonction de x :

la maison est de forme rectangulaire de dimensions $(20-x)$ et $(30-2x)$

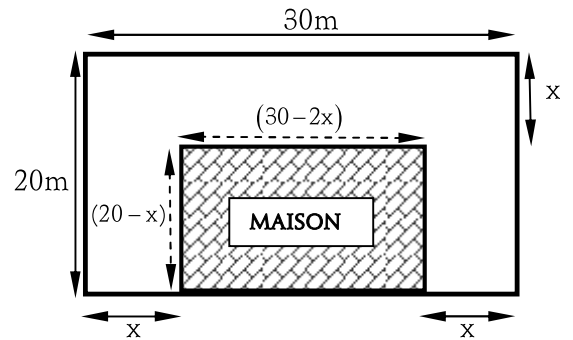
$$\text{donc } \mathbf{A} = (30 - 2x) \times (20 - x) = 2x^2 - 70x + 600$$

3- **A** = 252 signifie $2x^2 - 70x + 600 = 252$ avec $x \in]0, 20[\cap]0, 30[=]0, 20[$

$$2x^2 - 70x + 600 = 252 \text{ signifie } 2x^2 - 70x + 348 = 0$$

D'après le premier question on a $x' = 6$ et $x'' = 29$

et puisque $x \in]0, 20[$ Alors la seule solution du problème est $\boxed{x=6}$



EXERCICE 3

1-E : $x^2 - x - 20 = 0$, $\Delta = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4 \times 1 \times (-20) = 1 + 80 = 81 > 0$. E admet deux solutions

$$x' = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{1 - 9}{2} = \frac{-8}{2} = -4 \quad ; \quad x'' = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{1 + 9}{2} = \frac{10}{2} = 5 \quad \text{donc } S_{\mathbb{R}} = \{-4; 5\}$$

2- a $P(1) = 1^3 - 2 \times 1^2 - 19 \times 1 + 20 = 1 - 2 - 19 + 20 = -1 + 1 = 0$; donc 1 est une racine de $P(x)$

$$\begin{aligned} P(x) &= x^3 - 2x^2 - 19x + 20 = (x-1)(ax^2 + bx + c) \\ &= ax^3 + bx^2 + cx - ax^2 - bx - c \\ &= ax^3 + (b-a)x^2 + (c-b)x - c \end{aligned} \quad \text{donc } \begin{cases} a=1 \\ b-a=-2 \Rightarrow b=-2+a=-1 \\ c-b=-19 : \text{vérifié} \\ -c=-20 \Rightarrow c=20 \end{cases}$$

Et par suite $\boxed{P(x) = x^3 - 2x^2 - 19x + 20 = (x-1)(x^2 - x + 20) = (x-1)(x+4)(x-5)}$

3- a tableau de signe de $P(x)$

$$x^3 - 2x^2 - 19x + 20 \geq 0 \text{ (signifie) } x \in [-4, 1] \cup [5, +\infty[$$

b- d'après le tableau $0,9999 \in [-4, 1]$ donc $P(0,9999) > 0$

$$1,0001 \in [1, 5] \text{ donc } P(1,0001) < 0$$

et par suite $P(0,9999) > P(1,0001)$

x	$-\infty$	-4	1	5	$+\infty$		
$x-1$	-	-	0	+	+		
$x^2 - x - 20$	+	0	-	-	0	+	
$P(x)$	-	0	+	0	-	0	+

4- l'inéquation $(x^3 - 2x^2 - 19x + 20 \geq 0) \leq x\sqrt{x-2}$ est définie si $(x^3 - 2x^2 - 19x + 20 \geq 0)$ et $(x-2 \geq 0)$

$$\text{Donc } x \in ([-4, 1] \cup [5, +\infty[) \cap ([2, +\infty[) = [5, +\infty[$$

5- $\sqrt{(x^3 - 2x^2 - 19x + 20 \geq 0)} \leq x\sqrt{x-2}$ signifie $(\sqrt{(x^3 - 2x^2 - 19x + 20 \geq 0)})^2 \leq (x\sqrt{x-2})^2$

Signifie $x^3 - 2x^2 - 19x + 20 \leq x^2(x-2)$ signifie $x^3 - 2x^2 - 19x + 20 \leq x^3 - 2x^2$ signifie $-19x + 20 \leq 0$

Et par suite $x \in [5, +\infty[\cap \left[\frac{20}{19}, +\infty[\right] = [5, +\infty[$ donc $S_{\mathbb{R}} = [5, +\infty[$

EXERCICE 4

1- ABC est un triangle isocèle en A, I est le milieu de [BC], G est le centre de gravité de ABC.

le point G est le point d'intersection des deux médianes du triangle ABC (voir figure)

2- G est le centre de gravité de ABC donc

$$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0} \text{ . d'après la relation de chasle}$$

$$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GI} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{GI} + \overrightarrow{IC} = \vec{0} \text{ signifie } \overrightarrow{GA} + \underbrace{\overrightarrow{GI} + \overrightarrow{GI}}_{2\overrightarrow{GI}} + \underbrace{\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC}}_0 = \vec{0} \text{ donc } \boxed{\overrightarrow{GA} + 2\overrightarrow{GI} = \vec{0}} \text{ et puisque } 1+2=3 \neq 0 \text{ alors G est le}$$

barycentre des points pondérés (A, 1) (I, 2)

3- H le barycentre de (A, 1) et (I, 2) et (B, 3) signifie $\overrightarrow{HA} + 2\overrightarrow{HI} + 3\overrightarrow{HB} = \vec{0}$ signifie $\overrightarrow{HA} + \underbrace{2\overrightarrow{HI}}_{3\overrightarrow{HG}} + 3\overrightarrow{HB} = \vec{0}$ signifie $3\overrightarrow{HG} + 3\overrightarrow{HB} = \vec{0}$

et par suite $\boxed{\overrightarrow{HG} + \overrightarrow{HB} = \vec{0}}$ ainsi H est le milieu de [GB]

4- C l'ensemble des points M du plan tels que $\|\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MI} + 3\overrightarrow{MB}\| = \|\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MI} - 3\overrightarrow{MB}\|$ ①

a - si M=B ; $\|\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MI} + 3\overrightarrow{MB}\| = \|\overrightarrow{BA} + 2\overrightarrow{BI} + 3\underbrace{\overrightarrow{BB}}_0\| = \|\overrightarrow{BA} + 2\overrightarrow{BI}\|$

et $\|\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MI} - 3\overrightarrow{MB}\| = \|\overrightarrow{BA} + 2\overrightarrow{BI} - 3\underbrace{\overrightarrow{BB}}_0\| = \|\overrightarrow{BA} + 2\overrightarrow{BI}\|$

Et par suite l'égalité ① est vérifiée et donc $\boxed{B \in \mathcal{C}}$

b - M ∈ ℰ signifie $\|\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MI} + 3\overrightarrow{MB}\| = \|\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MI} - 3\overrightarrow{MB}\|$

. H le barycentre de (A, 1) et (I, 2) et (B, 3) donc $\|\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MI} + 3\overrightarrow{MB}\| = \|\overrightarrow{6MH}\| = 6MH$

. G est le barycentre de (A, 1) (I, 2) donc $\|\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MI} - 3\overrightarrow{MB}\| = \|\overrightarrow{3MG} - 3\overrightarrow{MB}\| = 3\|\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{BM}\| = 3\|\underbrace{\overrightarrow{BM} + \overrightarrow{MG}}_{\overrightarrow{BG}}\|$

Et par suite $\|\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MI} - 3\overrightarrow{MB}\| = 3BG$.

Ainsi M ∈ ℰ signifie 6MH = 3BG signifie $\boxed{MH = \frac{BG}{2}}$ Et par conséquent l'ensemble ℰ cherché est le cercle de centre H et

de rayon $R = \frac{BG}{2}$

Construction : ℰ est le cercle de centre H et passant par B (voir figure)

5- a- voir figure

5- b $\overrightarrow{DA} = \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DC}$

signifie $\overrightarrow{DG} + \overrightarrow{GA} = \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DC}$

signifie $\overrightarrow{DG} = \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{AG}$

signifie $\overrightarrow{DG} = \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DC} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AI}$

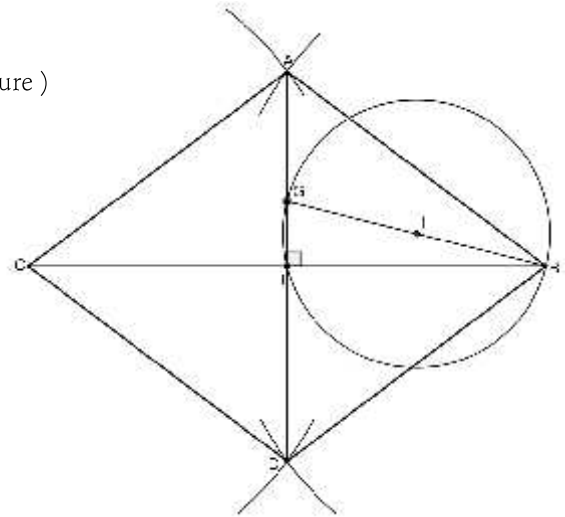
signifie $\overrightarrow{DG} = \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DC} + \frac{2}{3} \times \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$

signifie $\overrightarrow{DG} = \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DC} - \frac{1}{3}\overrightarrow{DA}$

signifie $\overrightarrow{DG} = \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DC} - \frac{1}{3}(\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DC})$

signifie $\overrightarrow{DG} = \underbrace{\left(\overrightarrow{DB} - \frac{1}{3}\overrightarrow{DB}\right)}_{\frac{2}{3}\overrightarrow{DB}} + \underbrace{\left(\overrightarrow{DC} - \frac{1}{3}\overrightarrow{DC}\right)}_{\frac{2}{3}\overrightarrow{DC}}$

Et par suite $\boxed{\overrightarrow{DG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{DB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{DC}}$



5- c G est barycentre du système $\{(D, \alpha); (B, \beta); (C, \gamma)\}$, avec $\alpha + \beta + \gamma \neq 0$

signifie $\overrightarrow{DG} = \frac{\beta}{\alpha + \beta + \gamma}\overrightarrow{DB} + \frac{\gamma}{\alpha + \beta + \gamma}\overrightarrow{DC} = \frac{2}{3}\overrightarrow{DB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{DC}$

signifie $\begin{cases} \beta = 2 \\ \gamma = 2 \\ \alpha + \beta + \gamma = 3 \end{cases}$ signifie $\begin{cases} \beta = 2 \\ \gamma = 2 \\ \alpha + 4 = 3 \end{cases}$ signifie $\begin{cases} \beta = 2 \\ \gamma = 2 \\ \alpha = -1 \end{cases}$

Donc G est barycentre du système $\{(D, -1); (B, 2); (C, 2)\}$

5- d DG = DI + IG = 3 + 1 = 4 donc $\boxed{DG = 4}$