

Lycée : Souassi	<i>Devoir de Synthèse N°1</i>	Prof : Mr Wissem Fligène
Date : 06-12-2010		Epreuve : Mathématiques
Classe : 2S1		Durée : 2 heures

- Il est recommandé de soigner la rédaction et la présentation de la copie -

Exercice 1: (4,5 points)

Répondre par vrai ou faux sans justification

- 1) Soit le trinôme de second degré $f(x) = ax^2 + bx + c$ où a, b et c étant trois réels avec $a \neq 0$
 - a) Si $c = 0$ alors l'équation $f(x) = 0$ admet 0 pour solution.
 - b) Si $a < 0$ et $\Delta = b^2 - 4ac < 0$ alors l'inéquation $f(x) \geq 0$ admet des solutions.
- 2) Si $P(x) = x(x^2 + 1)(x^3 + 2x - 1)$ alors $d^\circ(P) = 6$
- 3) Si P et Q sont deux polynômes non nuls alors $d^\circ(P + Q) = d^\circ(P) + d^\circ(Q)$
- 4) Si G est le barycentre des points pondérés $(A, \sqrt{2} - 1)$, $(B, 1)$ et $(C, -1)$ alors G est aussi le barycentre des points pondérés $(A, 1)$, $(B, \sqrt{2} + 1)$ et $(C, -1 - \sqrt{2})$
- 5) Soit A et B deux points distincts du plan et Δ une droite
Si $(AB) // \Delta$ alors $t_{\overline{AB}}(\Delta) = \Delta$

Exercice 2: (7,5 points)

- 1) Résoudre dans $\mathbb{R} : x^2 - 5x + 6 = 0$
- 2) Soit $f(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$
 - a) Vérifier que $f(x) = (x - 1)(x^2 - 5x + 6)$
 - b) Résoudre dans $\mathbb{R} : x^3 - 6x^2 + 11x - 6 \geq 0$
- 3) Soit $g(x) = x^4 - 5x^2 + 4$
 - a) Factoriser $t^2 - 5t + 4$
 - b) En déduire que $g(x) = (x^2 - 1)(x^2 - 4)$
- 4) Soit $h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$
 - a) Déterminer le domaine D de définition de h
 - b) Montrer que pour tout x de $D : h(x) = \frac{x - 3}{x^2 + 3x + 2}$
 - c) Résoudre dans $\mathbb{R} : h(x) \geq 1$

Exercice 3: (8 points)

La figure doit être tracée sur une page de votre double feuille qui contient uniquement le schéma

Soit ABC un triangle isocèle tel que $AB = AC = 4$ et $BC = 3$ (l'unité est le cm)

- 1) Construire le point E barycentre des points pondérés $(A, 1)$ et $(B, -4)$
- 2) Soit F le point défini par $\overline{BF} = 3\overline{BC}$
Montrer que F est le barycentre des points pondérés $(B, -2)$ et $(C, 3)$. Construire F
- 3) Soit G le barycentre des points pondérés $(A, 1)$; $(B, -4)$ et $(C, 6)$.
 - a) Montrer que les points G, E et C sont alignés.
 - b) Montrer que G appartient à la droite (AF) .
 - c) En déduire une construire du point G .
- 4) a) Déterminer et construire l'ensemble Δ des points M du plan vérifiant :
$$\|\overline{MA} - 4\overline{MB} + 6\overline{MC}\| = \|\overline{MA} - 4\overline{MB}\|$$
 - b) Déterminer et construire l'ensemble \mathcal{C} des points M du plan vérifiant :
$$\|\overline{MA} - 4\overline{MB} + 6\overline{MC}\| = 2\|\overline{AB} - \overline{AC}\|$$
- 5) a) Construire les points E', C', G' les images respectives de E, C, G par $t_{\overline{AC}}$
 - b) Montrer que les points E', C', G' sont alignés
 - c) Soit $\Delta' = t_{\overline{AC}}(\Delta)$; Montrer que $\Delta' \perp (E'G')$.

Correction

Solution-Exercice 1 : (6 × 0,75 pt)

1) a) VRAI

2) VRAI

4) VRAI

b) FAUX

3) FAUX

5) VRAI

Solution-Exercice 2 :

$$x^2 - 5x + 6 = 0 \quad (a = 1 ; b = -5 ; c = 6)$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 25 - 24 = 1 > 0 \text{ donc } x' = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{5-1}{2} = 2 \text{ et } x'' = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{5+1}{2} = 3$$

$$\boxed{S_{\mathbb{R}} = \{2; 3\}} \quad (1 \text{ pt})$$

a) $(x - 1)(x^2 - 5x + 6) = x^3 - 5x^2 + 6x - x^2 + 5x - 6 = x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = f(x)$ (0,75 pt)

b) $x^3 - 6x^2 + 11x - 6 \geq 0$ sig $(x - 1)(x^2 - 5x + 6) \geq 0$

x	$-\infty$	1	2	3	$+\infty$
$x-1$	-	0	+	+	+
$x^2 - 5x + 6$	+	+	0	-	0
$(x - 1)(x^2 - 5x + 6)$	-	0	+	0	-

$$\boxed{S_{\mathbb{R}} = [1,2] \cup [3, +\infty[} \quad (1 \text{ pt})$$

a) $t^2 - 5t + 4$ ($a = 1 ; b = -5 ; c = 4$)

$a + b + c = 0$ donc $x' = 1$ et $x'' = \frac{c}{a} = 4$ donc $\boxed{t^2 - 5t + 4 = (t - 1)(t - 4)}$ (1 pt)

b) $g(x) = x^4 - 5x^2 + 4$. On pose $t = x^2$ donc

$$x^4 - 5x^2 + 4 = t^2 - 5t + 4 = (t - 1)(t - 4) = (x^2 - 1)(x^2 - 4)$$

D'où $g(x) = (x^2 - 1)(x^2 - 4)$ (0,75 pt)

a) $h(x)$ est définie si et seulement si $g(x) \neq 0$

on suppose $g(x) = 0$ alors $x^2 - 1 = 0$ ou $x^2 - 4 = 0$ sig $x^2 = 1$ ou $x^2 = 4$ sig $x = 1$ ou $x = -1$ ou $x = 2$

ou $x = -2$. Donc $\boxed{D = \mathbb{R} \setminus \{-2; -1; 1; 2\}}$ (1 pt)

b)

$$h(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{(x - 1)(x^2 - 5x + 6)}{(x^2 - 1)(x^2 - 4)} = \frac{(x - 1)(x - 2)(x - 3)}{(x - 1)(x + 1)(x - 2)(x + 2)} = \frac{x - 3}{(x + 1)(x + 2)}$$

$$= \frac{x - 3}{x^2 + 3x + 2} \quad (1 \text{ pt})$$

c) $h(x) \geq 1$

Cette inéquation existe ssi $x \in D = \mathbb{R} \setminus \{-2; -1; 1; 2\}$

$$h(x) \geq 1 \text{ sig } \frac{x - 3}{x^2 + 3x + 2} \geq 1 \text{ sig } \frac{x - 3}{x^2 + 3x + 2} - 1 \geq 0 \text{ sig } \frac{x - 3 - x^2 - 3x - 2}{x^2 + 3x + 2} \geq 0 \text{ sig}$$

$$\frac{-x^2 - 2x - 5}{x^2 + 3x + 2} \geq 0 \text{ sig } \frac{x^2 + 2x + 5}{x^2 + 3x + 2} \leq 0$$

$x^2 + 2x + 5$ ($a = 1 ; b' = 1 ; c = 5$)

$\Delta' = b'^2 - ac = 1 - 5 = -4 < 0$ donc signe de $x^2 + 2x + 5$ est celui de $a = 1 > 0$

x	$-\infty$	-2	-1	$+\infty$
$x^2 + 2x + 5$	+	+	+	+
$x^2 + 3x + 2$	+	0	-	0
$\frac{x^2 + 2x + 5}{x^2 + 3x + 2}$	+	-	+	+

$$\boxed{S_{\mathbb{R}} =]-2; -1[} \quad (1 \text{ pt})$$

Solution-Exercice 3 :

E barycentre de $(A, 1)$ et $(B, -4)$ sig $\overrightarrow{AE} = \frac{-4}{1-4}\overrightarrow{AB} = \frac{4}{3}\overrightarrow{AB}$ ou $\overrightarrow{BE} = \frac{1}{1-4}\overrightarrow{BA} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{BA}$ (0, 25 pt)

* Construction de E (0, 75 pt)

2) Supposons que F est le barycentre des points (B, α) et (C, β) donc $\overrightarrow{BF} = \frac{\beta}{\alpha+\beta}\overrightarrow{BC}$ or $\overrightarrow{BF} = 3\overrightarrow{BC}$ càd $\overrightarrow{BF} = \frac{3}{1}\overrightarrow{BC}$ donc $\beta = 3$ et $\alpha + \beta = 1$ cad $\alpha = 1 - \beta = 1 - 3 = -2$

Ainsi F est le barycentre des points pondérés $(B, -2)$ et $(C, 3)$ (0, 5 pt)

* construction de F (0, 5 pt)

3) a) On a G le barycentre de $(A, 1)$; $(B, -4)$ et $(C, 6)$ et E barycentre de $(A, 1)$ et $(B, -4)$ alors G le barycentre de $(E, 1 - 4)$ et $(C, 6)$ cad G le barycentre de $(E, -3)$ et $(C, 6)$ donc G, E et C sont alignés (0, 75 pt)

b) On a F est le barycentre de $(B, -2)$ et $(C, 3)$ alors F est le barycentre de $(B, -2 \times 2)$ et $(C, 3 \times 2)$ cad F est le barycentre de $(B, -4)$ et $(C, 6)$

Comme G est le barycentre de $(A, 1)$; $(B, -4)$ et $(C, 6)$ alors G est le barycentre de $(A, 1)$ et $(F, -4 + 6)$ cad G est le barycentre de $(A, 1)$ et $(F, 2)$ donc G, A et F sont alignés d'où $G \in (AF)$ (0, 75 pt)

c) on a $G \in (AF)$ et $G \in (CE)$ [puisque G, E et C sont alignés] donc $\{G\} = (AF) \cap (CE)$ (0, 5 pt)

4) a) Puisque G est le barycentre de $(A, 1)$; $(B, -4)$ et $(C, 6)$ alors

$$\overrightarrow{MA} - 4\overrightarrow{MB} + 6\overrightarrow{MC} = (1 - 4 + 6)\overrightarrow{MG} = 3\overrightarrow{MG}$$

Et comme E barycentre de $(A, 1)$ et $(B, -4)$ alors $\overrightarrow{MA} - 4\overrightarrow{MB} = (1 - 4)\overrightarrow{ME} = -3\overrightarrow{ME}$

$\|\overrightarrow{MA} - 4\overrightarrow{MB} + 6\overrightarrow{MC}\| = \|\overrightarrow{MA} - 4\overrightarrow{MB}\|$ sig $\|3\overrightarrow{MG}\| = \|-3\overrightarrow{ME}\|$ sig $3MG = 3ME$ sig $MG = ME$ donc Δ est la médiatrice de $[GE]$ (0, 75 pt)

* construction de Δ (0, 25 pt)

b) $\|\overrightarrow{MA} - 4\overrightarrow{MB} + 6\overrightarrow{MC}\| = 2\|\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}\|$ sig $\|3\overrightarrow{MG}\| = 2\|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CA}\|$ sig $\|3\overrightarrow{MG}\| = 2\|\overrightarrow{CB}\|$ sig $3MG = 2CB$ sig $3MG = 6$ sig $MG = 2$ donc \mathcal{C} est le cercle de centre G et de rayon 2 (0, 75 pt)

* construction de \mathcal{C} (0, 25 pt)

5) a) $t_{\overline{AC}}(E) = E$ sig $\overrightarrow{EE'} = \overline{AC}$ (0, 25 pt)

$$t_{\overline{AC}}(C) = C \text{ sig } \overrightarrow{CC'} = \overline{AC} \text{ (0, 25 pt)}$$

$$t_{\overline{AC}}(G) = G \text{ sig } \overrightarrow{GG'} = \overline{AC} \text{ (0, 25 pt)}$$

b) On a E, C et G sont alignés et la translation conserve l'alignement alors $t_{\overline{AC}}(E), t_{\overline{AC}}(C) = C$ et $t_{\overline{AC}}(G) = G$ sont alignés cad E', C', G' sont alignés (0, 75 pt)

c) On a Δ est la médiatrice de $[GE]$ alors $\Delta \perp (GE)$ et comme la translation conserve l'orthogonalité alors $t_{\overline{AC}}(\Delta) \perp t_{\overline{AC}}((GE))$

d'autre part $t_{\overline{AC}}((GE)) = (t_{\overline{AC}}(G)t_{\overline{AC}}(E)) = (G'E')$ donc $\Delta' \perp (E'G')$ (0, 75 pt)

