Site web : http://www.matheleve.net/ *Email1 :contact@matheleve.net* *Email2 :matheleve@gmail.com*	***Devoir de synthèse n°02***		
Lycée Ali Bourguiba Bembla	*2 ème Sci 3*	*Mardi 06-03-2012*	***Chortani Atef***

Exercice 1 (4 points)

1)Soit $x \in \left[\frac{\pi}{2} ; \pi\right]$, calculer $\cos x$ sachant que $\sin x = \frac{4}{5}$

2) Montrer que la suite (u_n) définie par $u_n = 3^{2n+3} - 9^n$ est géométrique

3)Calculer $\cos\frac{\pi}{5} + \cos\frac{2\pi}{5} + \cos\frac{3\pi}{5} + \cos\frac{4\pi}{5}$

4) Montrer que pour tout entier naturelle n , $(n+2)$ divise $3n^2 + 7n + 2$

5) Déterminer tout les entiers naturels n tel que $\frac{n+16}{n+1}$ soit entier

Exercice 2(5 points)

Soit $n \in \mathbb{N}$,on considère la suite (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = 3u_n + 1 , n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

1) a)Calculer u_1 et u_2

b) Vérifier que la suite (u_n) n'est ni arithmétique ni géométrique

2) Soit la suite (v_n) définie sur $\mathbb{N}$ par: $v_n = u_n + \frac{1}{2}$

a)Calculer v_0

b) Montrer que (v_n) est une suite géométrique de raison 3

c)Exprimer alors en fonction de n , v_n et u_n

3)a) Calculer en fonction de n , $S = 1 + 3 + 3^2 + .. + 3^n$

b) Montrer que 2 divise $3^{n+1} - 1$

c) En déduire que u_n est un entier naturel.

d) Montrer que pour tout entier naturelle n ; u_n et u_{n+1} sont premiers entre eux

Exercice 3 (5 points)

Soient (u_n) et (v_n) deux suites définies sur $\mathbb{N}$ respectivement par

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \dfrac{1}{2 - u_n} , n \in \mathbb{N} \end{cases} \quad \text{et} \quad v_n = \frac{1}{u_n - 1}$$

On vous admet que $u_n \in \mathbb{R} \setminus \{1; 2\}$ pour tout entier naturel n

1) Calculer u_1, u_2, v_0 et v_1

2) a) Montrer que (v_n) est une suite arithmétique de raison -1.

b) Donner l'expression de v_n puis de u_n en fonction de n.

3) Pour $n \geq 1$, on pose $S_n = v_0 + v_1 + .. + v_{n-1}$ et $P_n = 2^{v_0} \times 2^{v_1} \times .. \times 2^{v_{n-1}}$

a) Calculer S_n en fonction de n.

b) En déduire l'expression de P_n en fonction de n.

Exercice 4 (6 points)

Soit ABC un triangle tel que $AC = 6$, $\widehat{ABC} = \frac{\pi}{4}$ et $\widehat{ACB} = \frac{\pi}{3}$

1) On appliquant la loi de sinus montrer que $AB = 3\sqrt{6}$

2) a)Résoudre dans $\mathbb{R}_+$ l'équation $x^2 - 6x - 18 = 0$

b) En déduire en appliquant le théorème d'El-Kashi montrer que $BC = 3(1 + \sqrt{3})$

c)Calculer l'aire du triangle ABC.

3) Montrer que $\widehat{BAC} = \frac{5\pi}{12}$

4) Soit $\mathscr{C}$ cercle circonscrit au triangle ABC

a)Calculer R le rayon de $\mathscr{C}$.

b) En déduire que $\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$

c)Calculer $\left(\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}\right)^2$

d) En déduire $\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right)$ et $\tan\left(\frac{5\pi}{12}\right)$