MINISTERE DE L'EDUCATION NATIONALE DIRECTION REGIONALE DE MANOUBA	DEVOIR DE SYNTHÈSE N° 2 MATHÉMATIQUES CLASSES : DEUXIÈME SCIENCES 1+2	LYCEE SECONDAIRE OUED ELLIL ANNEE SCOLAIRE 2012 - 2013
PROF : MR BELLASSOUED	DURÉE : DEUX HEURES	DATE : MARS 2013

EXERCICE 1: 3 POINTS : Cocher la case correspondante dans la feuille annexe — BAREME

Choisir sans justification la bonne réponse pour chaque question:

1- La suite $U_n = 5\times 3^{2n}$ est une suite géométrique de raison : **a)** $q=5$; **b)** $q=3$; **c)** $q=9$ — 1

2- Le reste de la division euclidienne de 376987 par 11 est: **a)** $r=6$; **b)** $r=5$; **c)** $r=0$ — 1

3- Soit $n\in\mathbb{N}$. si $d = P.G.C.D(n+1, 2n+3)$, alors d est égale a: **a)** $d=1$; **b)** $d=2$; **c)** $d=n$ — 1

EXERCICE 2: 2,5 POINTS

1- Effectuer la division euclidienne du nombre 2017 par 6 — 0,5

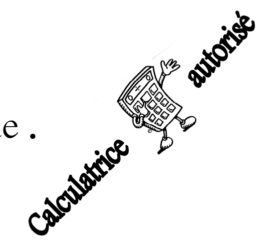
2-Soit p un nombre premier supérieur a 3

a- Montrer que les restes possibles de la division euclidienne de p par 6 sont 1 et 5 — 1

b- En déduire que p^2+5 est divisible par 6 — 1

EXERCICE 3: 6 POINTS

On définit une suite $(U_n)_{n\geq 0}$ par : $U_0 = 6$ et $U_{n+1} = 3U_n - 8$



1-a- Vérifier que $U_1 = 10$ et $U_2 = 22$ — 0,5

b- En déduire que la suite U_n n'est ni arithmétique, ni géométrique. — 1

2-On définit la suite $(V_n)_{n\geq 0}$ par $V_n = U_n - 4$.

Montrer que la suite V_n est géométrique de raison 3. Calculer V_0. — 1,5

3-En déduire l'expression de V_n puis celle de U_n en fonction de n — 1

4-a-Calculer en fonction de n la somme $S_n = V_0 + V_1 + \cdots\cdots + V_n$. — 1

b-En déduire en fonction de n la somme $T_n = U_0 + U_1 + \cdots\cdots + U_n$ — 1

EXERCICE 4: 8,5 POINTS / <u>les constructions géométriques seront complétés dans la feuille annexe</u>

Dans la figure 1 si contre on a :

$\mathscr{C}$ le cercle de centre O et de diamètre [AD] circonscrit au triangle ABC . I milieu de [BC]

• On désigne par h l'homothétie centre A et de rapport 2

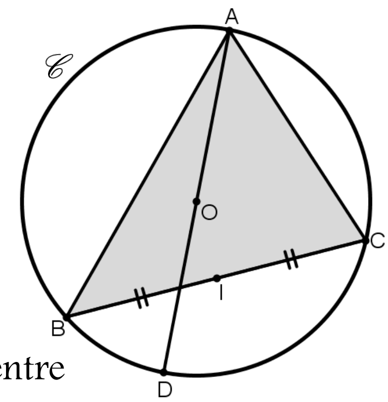


figure1

1-Construire le point $E = h(B)$ et le point $F = h(C)$ — 1

2- a-Déterminer l'image de O par h. Justifier ta réponse — 0,5

b-K est le projeté orthogonal de D sur (EF)

Montrer que l'image de (IO) par h est la droite (DK) — 1

3- a-Montrer que $h(I) = K$ — 1

b-On déduire que ABKC est un parallélogramme . — 0,75

4- a-Construire le cercle $\mathscr{C}'$ image de $\mathscr{C}$ par h .préciser son centre — 0,5

b-Montrer que le cercle $\mathscr{C}'$ est circonscrit au triangle AEF — 0,5

5-On désigne par h_1 l'homothétie de centre C tel-que $h_1(B) = I$

a-Donner le rapport de h_1 — 0,5

b-On suppose que A et C sont fixes et B varie sur le cercle $\mathscr{C}$.

Déterminer et construire l'ensemble $\mathfrak{C}_1$ décrit par le point I . — 1

6- a-Déterminer et construire l'ensemble $\mathfrak{C}_2$ décrit par le point K lorsque B varie sur $\mathscr{C}$ — 1

b-On désigne par $t_{\overrightarrow{AC}}$ la translation du vecteur $\overrightarrow{AC}$. Montrer que $t_{\overrightarrow{AC}}(\mathscr{C}) = h(\mathfrak{C}_1)$ — 0,75

fin

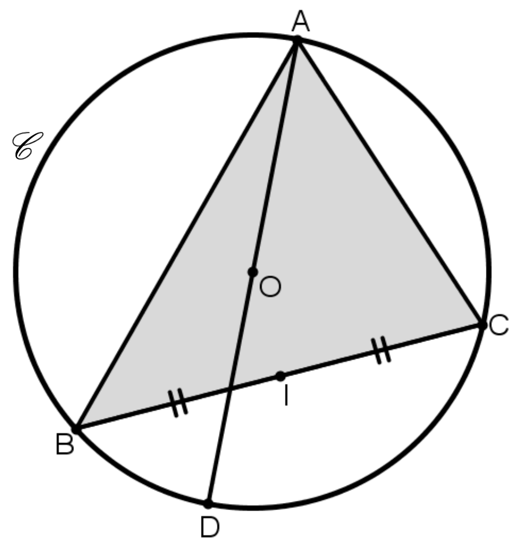
FEUILLE ANNEXE

Nom Prénom Classe :$2^{\text{ième}}$ sc

EXERCICE 1: mettre un croix dans la case correspondante .

PROPOSITION	a	b	c
1-La suite $U_n = 5 \times 3^{2n}$ est une suite géométrique de raison :	$q = 5$	$q = 3$	$q = 9$
2-Le reste de la division euclidienne de 376987 par 11 est :	$r = 6$	$r = 5$	$r = 0$
3-Soit $n \in \mathbb{N}$; si $d = P.G.C.D(n+1, 2n+3)$,alors d est égale a :	$d = 1$	$d = 2$	$d = n$

EXERCICE 4: Compléter les constructions géométriques



CORRECTION DE L'EXERCICE 1

PROPOSITION	a	b	c
1-La suite $U_n = 5\times 3^{2n}$ est une suite géométrique de raison :	$q=5$	$q=3$	$q=9$
			×
2-Le reste de la division euclidienne de 376987 par 11 est :	$r=6$	$r=5$	$r=0$
	×		
3-Soit $n\in\mathbb{N}$; si $d = P.G.C.D(n+1, 2n+3)$,alors d est égale a :	$d=1$	$d=2$	$d=n$
	×		

Justification des réponses :

1- $U_{n+1} = 5\times 3^{2(n+1)} = 5\times 3^{2n+2} = \underbrace{5\times 3^{2n}}_{U_n}\times 3^2 = 9U_n$; d'ou la suite U_n est géométrique de raison $\boxed{q=9}$

2- $d = 7-8+9-6+7-3 = -1+3+4 = 6$, d'ou Le reste de la division euclidienne de 376987 par 11 est $\boxed{r=6}$

3-Soit $d = P.G.C.D(n+1, 2n+3)$. Calculons le $P.G.C.D(n+1, 2n+3)$ par l'algorithme d'Euclide

$2n+3 = 2\times(n+1)+1$, $n+1 = 1\times(n+1)+0$ et par suite $\boxed{d=1}$

2ième méthode : Puisque la justification n'est pas demandée on peut remplacer par exemple l'entier n par 0 ,ainsi $d = PGCD(1,3) = 1$

CORRECTION DE L'EXERCICE 2

1- Effectuons la division euclidienne du nombre 2017 par 6 : $\boxed{2017 = 6\times 336+1}$

2-Soit p un nombre premier supérieur a 3

a-il s'agit de montrer que les restes de la division euclidienne de p par 6 ne peuvent pas êtres un des nombres 0 , 2 , 3 et 4

• $p = 6q + r$, avec $0 \leqslant r < 6$

si $r=0$ ou $r=2$ ou $r=4$, alors p sera divisible par 2 :
2 divise 6q et 2 divise r donc 2 divise $p = 6q+r$ et cela contredit l'hypothèse que p est **un nombre premier supérieur a 3 , donc p n'est divisible que par 1 et lui même .**

si $r=3$ alors p sera divisible par 3 :
3 divise 6q et 3 divise r donc 3 divise $p = 6q+r$) et cela contredit l'hypothèse que p est **un nombre premier**

Conclusion :les restes possibles de la division euclidienne de p par 6 sont 1 ou 5

b- D'après question a : $p = 6q+1$ ou $p = 6q+5$

• Si $p = 6q+1$,alors :

$$p^2+5 = (6q+1)^2+5 = 36q^2+12q+1+5 = 36q^2+12q+6 = \underbrace{6\times(6q^2+2q+1)}_{\text{Divisible par 6}}$$

• Si $p = 6q+5$,alors :

$$p^2+5 = (6q+5)^2+5 = 36q^2+60q+25+5 = 36q^2+60q+30 = \underbrace{6\times(6q^2+10q+5)}_{\text{Divisible par 6}}$$

Conclusion : p^2+5 est divisible par 6 pour tout **nombre premier p supérieur a 3 .**

CORRECTION DE L'EXERCICE 3

On définit une suite $(U_n)_{n\geq 0}$ par : $U_0 = 6$ et $U_{n+1} = 3U_n - 8$ ①

1-a- On remplace n par 0 dans l'égalité ① on aura $U_1 = 3U_0 - 8 = 3\times 6 - 8 = 10$, d'ou $\boxed{U_1 = 10}$

On remplace n par 1 dans l'égalité ① on aura $U_2 = 3U_1 - 8 = 3\times 10 - 8 = 22$, d'ou $\boxed{U_2 = 22}$

b- $U_1 - U_0 = 10 - 6 = 4$, $U_2 - U_1 = 22 - 10 = 12$

$U_2 - U_1 \neq U_1 - U_0$ d'ou la suite U_n n'est pas arithmétique

$\frac{U_2}{U_1} = \frac{22}{10}$, $\frac{U_1}{U_0} = \frac{10}{6}$; $\frac{U_1}{U_0} \neq \frac{U_2}{U_1}$ d'ou la suite U_n n'est pas géométrique

Conclusion : la suite U_n n'est ni arithmétique, ni géométrique

2-On définit la suite $(V_n)_{n\geq 0}$ par $V_n = U_n - 4$.

$V_{n+1} = U_{n+1} - 4$ et d'après ① on aura $V_{n+1} = 3U_n - 8 - 4 = 3U_n - 12 = 3(\underbrace{U_n - 4}_{V_n}) = 3V_n$

ainsi la suite V_n est géométrique de raison $q = 3$ et de premier terme $V_0 = U_0 - 4 = 6 - 4 = 2$

3- $V_n = V_0 q^n = 2\times 3^n$, d'ou $\boxed{V_n = 2\times 3^n}$

$V_n = U_n - 4$ signifie $U_n = V_n + 4 = 2\times 3^n + 4$ d'ou $\boxed{U_n = 2\times 3^n + 4}$

4-a- $S_n = V_0 + V_1 + \cdots\cdots + V_n$ .est la somme des (n+1) premiers termes consécutifs de la suite

géométrique V_n , d'ou $S_n = V_0 \times \frac{1-q^{n+1}}{1-q} = 2\times \frac{1-3^{n+1}}{1-3} = 2\times \frac{3^{n+1}-1}{3-1} = 2\times \frac{3^{n+1}-1}{2} = 3^{n+1} - 1$

donc $\boxed{S_n = 3^{n+1} - 1}$

b- $U_n = V_n + 4$; $T_n = U_0 + U_1 + \cdots\cdots + U_n = (V_0 + 4) + (V_1 + 4) + \cdots\cdots + (V_n + 4)$

signifie $T_n = \underbrace{(V_0 + V_1 + \cdots\cdots + V_n)}_{S_n} + \underbrace{(4 + 4 + \cdots\cdots + 4)}_{(n+1)\text{fois}} = S_n + (n+1)\times 4$

signifie $T_n = 3^{n+1} - 1 + 4n + 4 = 3^{n+1} + 4n + 3$ donc $\boxed{T_n = 3^{n+1} + 4n + 3}$

CORRECTION DE L'EXERCICE 4

1- Construction des points E et F : • $E = h(B)$ signifie $\overrightarrow{AE} = 2\overrightarrow{AB}$ • $F = h(C)$ signifie $\overrightarrow{AF} = 2\overrightarrow{AC}$

2-a-O milieu de diamètre [AD] donc $\overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{AO}$, et par suite $h(O) = D$

b- • K est le projeté orthogonal de D sur (EF) donc $\boxed{(DK)\perp(EF)}$ ①

• $E = h(B)$ et $F = h(C)$ donc $h(BC) = (EF)$ et par suite $\boxed{(BC)//(EF)}$ ②

de ① et ② on déduit que $\boxed{(DK)\perp(BC)}$ ③

• $OB = OC$ et $IB = IC$ donc (OI) est la médiatrice du segment $[BC]$ et par suite $\boxed{(OI)\perp(BC)}$ ④

de ① et ② on déduit que $\boxed{(OI)//(DK)}$ ⑤

• $h(O) = D$, donc $h((OI))$ est la droite passante par D et parallèle a(OI),d'après ⑤ $\boxed{h((OI)) = (DK)}$

3- a-Montrons que $h(I) = K$

$I \in (OI)\cap(BC)$, donc $h(I) \in h((OI)) \cap h((BC))$ et par suite $h(I) \in (DK)\cap(EF) = \{K\}$, d'où $\boxed{h(I) = K}$

b- • $h(I) = K$ donc $\overrightarrow{AK} = 2\overrightarrow{AI}$ et par suite $\boxed{I = A * K}$ ①, et on a $\boxed{I = B * C}$ ②

de ① et ② on déduit que les diagonales $[AK]$ et $[BC]$ du quadrilatère ABKC se coupent en leur milieu I , et par suite AKBC est un parallélogramme

4-a- $\mathscr{C}$ est un cercle de centre O et de rayon OA , donc $\mathscr{C}' = h(\mathscr{C})$ est un cercle de centre $h(O) = D$ et de rayon $2OA = AD$. **Voir figure 1**

b- Le cercle $\mathscr{C}$ passe par les points A,B et C , donc $\mathscr{C}' = h(\mathscr{C})$ passe par les points $h(A) = A$,

$h(B) = E$ et $h(C) = F$, et par suite le cercle $\mathscr{C}'$ circonscrit au triangle AEF .

5- a-h_1 l'homothétie de centre C tel-que $h_1(B) = I$

I milieu de [BC] donc $\overrightarrow{CI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CB}$ et par suite I est l'image de B par l'homothétie de centre C et de rapport $\frac{1}{2}$, ainsi le rapport de l'homothétie h_1 est $\frac{1}{2}$

b- On suppose que A et C sont fixes et B varie sur le cercle $\mathscr{C}$.

$h_1(B) = I$; si B varie sur $\mathscr{C}$ alors I varie sur $h_1(\mathscr{C})$

- $\mathscr{C}$ est un cercle de diamètre AD , donc $h_1(\mathscr{C})$ est un cercle de diamètre $\frac{1}{2}AD = OA = OC$

ainsi I varie sur $\mathbf{C}_1$: cercle de diamètre OC **(voir figure1)**

6- a-l'ensemble $\mathbf{C}_2$ décrit par le point K

lorsque B varie sur $\mathscr{C}$,d'après **5°- b,** I varie sur $\mathbf{C}_1$ et d'après **3°-b** $h(I) = K$, donc K varie sur $h(\mathbf{C}_1)$

- $\mathbf{C}_1$ est un cercle de diamètre OC, donc $h(\mathbf{C}_1)$est un cercle de diamètre $h(O)h(C) = DF$

ainsi K varie sur $\mathbf{C}_2$: cercle de diamètre DF **(voir figure 1)**

b- ABKC est un parallélogramme signifie $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BK}$ et par suite $t_{\overrightarrow{AC}}(B) = K$

et puisque $h(I) = K$ alors $t_{\overrightarrow{AC}}(B) = h(I)$

Si B décrit le cercle $\mathscr{C}$, I décrit le cercle $\mathbf{C}_1$ et par suite $\boxed{t_{\overrightarrow{AC}}(\mathscr{C}) = h(\mathbf{C}_1) = \mathbf{C}_2}$

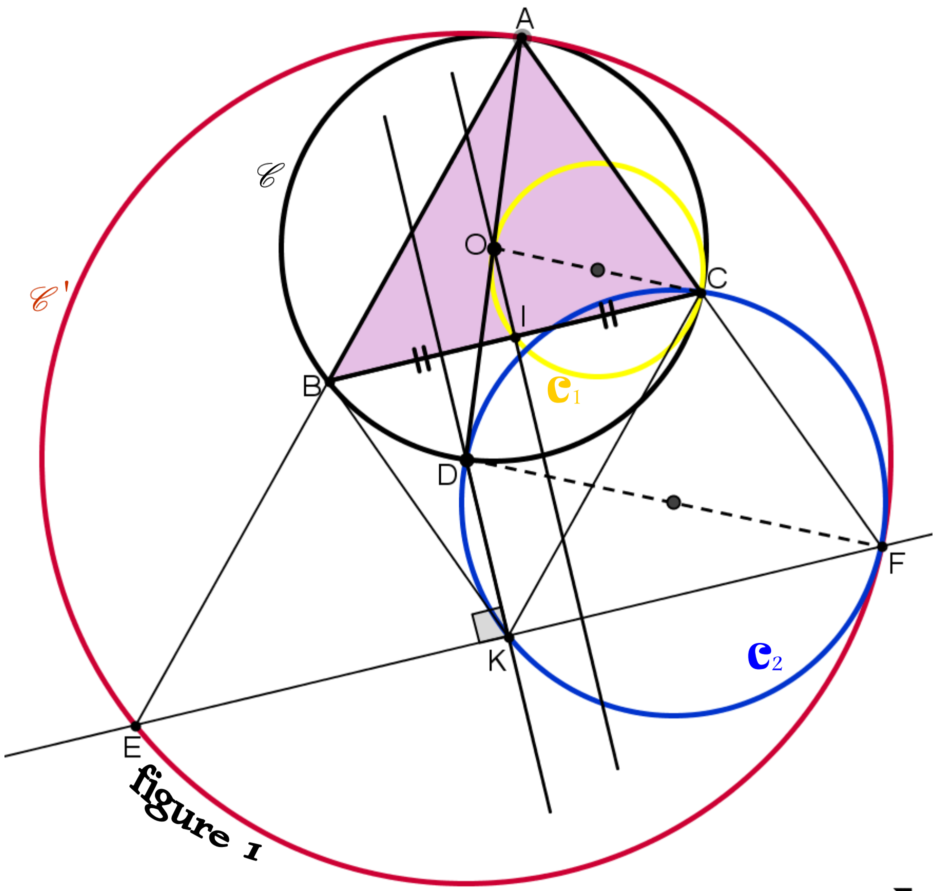


figure 1

FIN