$2^{ème}$ années secondaire	**Devoir de Synthèse N°3** **Mathématiques**	Le 24 / 05 / 2005 Durée : 2 H

Exercice N°1 : (8 pts)

Soit $f(x) = (Cosx + \dfrac{1}{Cosx})^2 - Tg^2x$; avec $x \in [0,\pi] \setminus \left\{\dfrac{\pi}{2}\right\}$

1-/ Calculer $f(\pi)$ et $f(\dfrac{2\pi}{3})$.

2-/ a) Montrer que : $f(x) = Cos^2x + 3$.

b) En déduire que pour $x \in [0,\pi] \setminus \left\{\dfrac{\pi}{2}\right\}$ on a : $3 < f(x) \leq 4$

3-/ Soit $g(x) = Sin^2x + Cosx + 3$

a) Montrer que : $f(x) - g(x) = 2Cos^2x - Cosx - 1$.

b) Résoudre dans $[0,\pi]$: $f(x) = g(x)$.

4-/ Soit a un réel de $[0,\pi] \setminus \left\{\dfrac{\pi}{2}\right\}$ tel que $Tga = -2\sqrt{2}$

Calculer $Cosa$, $Sina$ puis $g(a)$.

5-/ Soit $A = Cos^2\dfrac{\pi}{8} + Cos^2\dfrac{3\pi}{8}$ et $B = Cos\dfrac{\pi}{8} + Cos\dfrac{7\pi}{8}$

a) Calculer A et B.

b) En déduire alors que : $f(\dfrac{\pi}{8}) + g(\dfrac{7\pi}{8}) + Cos\dfrac{\pi}{8} = 7$.

Exercice N°2 : (12 pts) (les parties I – et II – sont indépendantes)

On considère R=$(O,\vec{i},\vec{j})$ un repère orthonormé du plan .

I – Soit les points $E(4,-2)$; $F(6,0)$ et $G(0,2)$.

1-/ a) Montrer que $\overrightarrow{EF}$ et $\overrightarrow{EG}$ sont orthogonaux.

b) En déduire que E, F et G appartiennent à un même cercle ζ de centre $I(3,1)$ et dont on déterminera le rayon $\mathcal{R}$.

2-/ a) Ecrire une équation cartésienne de la droite Δ passant par E et parallèle à (FG).

b) Calculer la distance de point I à la droite Δ.

c) Ecrire une équation du cercle ζ' de **centre** G et **tangent** à Δ.

Voir verso

II – Soit $\alpha \in [0,\pi]$, on donne les droites D_1 et D_2 d'équations respectives :

$$D_1 : (1 - Sin\alpha).x - Cos\alpha\,.y + \frac{1}{2} = 0 \quad \text{et} \quad D_2 : (1 + Sin\alpha).x - Cos\alpha\,.y + 3 = 0 \quad .$$

1-/ Déterminer α pour que $D_1 \perp D_2$

2-/ Soient les points : $A(Sin\alpha, Cos\alpha)$ et $B(Cos\alpha, -Sin\alpha)$.

a) Déterminer α pour que $A \in D_1$.

b) Montrer que pour tout $\alpha \in [0,\pi]$: $BA = \sqrt{2}$

3-/ Soit ξ l'ensemble des points $M(x, y)$ vérifiant : $x^2 + y^2 - (2Cos\alpha).x + (2Sin\alpha).y - 1 = 0$
Montrer que ξ est un cercle de centre *B* et de rayon *BA*.

4-/ On prend $\alpha = \dfrac{5\pi}{6}$

a) Vérifier que l'équation cartésienne de D_1 est : $x + \sqrt{3}y + 1 = 0$

b) Déterminer les coordonnées du point *A* **et** l'équation de cercle ξ.

c) Montrer que ξ et D_1 se coupent en deux points *A* et A' dont on déterminera les coordonnées du point A'.

Bon Travail