Exercice

Soit f la fonction définie par $f(x) = 2/3.x^2$

1/ Étudier f et tracer sa courbe représentative (C_f) relativement à un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$

2/ En déduire la courbe représentative (C_g) de la fonction g qui à x associe $-2/3.x^2$

3/ a- Montrer que la courbe (C_h) de la fonction h définie par $h(x) = 3 - 2/3.x^2$ se déduit de (C_g) par une translation dont on précisera le vecteur.

b- Déterminer les coordonnées des points communs à (C_f) et (C_h).

4/ a- Tracer la courbe (C_k) représentative de la fonction k définie par $k(x) = \sup(f(x),h(x))$

b- Déterminer suivant les valeurs du réel m le nombre des solutions de l'équation: $k(x) = m$.

Solution

1/ Étude de f

- Domaine de définition : $D_f = IR$
- Parité : Pour $x \in IR$, $(-x) \in IR$

  $f(-x) = 2/3(-x)^2 = 2/3x^2$ donc $f(-x) = f(x)$

  d'ou f est paire alors il suffit de travailler sur $[0, +\infty[$

- Variation de f sur $[0, +\infty[$

  Soient a et b appartenant à l'intervalle $[0, +\infty[$ tels que $a < b$

$a < b$	alors	a^2	$<$	b^2
	par suite	$2/3.a^2$	$<$	$2/3.b^2$
	c'est à dire	$f(a)$	$<$	$f(b)$

  donc f est strictement croissante sur IR^+

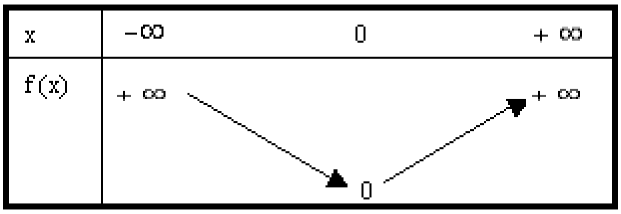
- Limites

  Quand x tend vers $+\infty$

x	10^3	10^5	10^8	10^{10}
f(x)	$2.10^3/3$	$2.10^5/3$	$2.10^8/3$	$2.10^{10}/3$

- Ainsi limite de f(x) quand x tend vers $+\infty$ est égale $+\infty$.

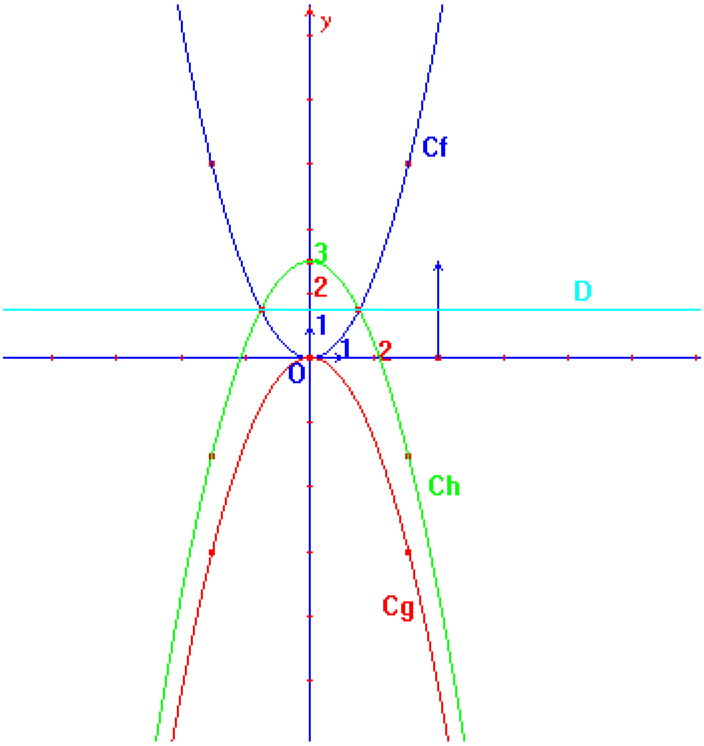
Tableau de variation:



- Tableau de valeurs:

x	0	1/2	1	3	6	9
f(x)	0	1/6	2/3	6	24	54

- Courbe représentative



2/ Déduisons Cg.

On a : $g(x) = -2/3x^2 = -f(x)$ pour tout $x \in IR$.

Soit $M(x,y)$ un point du plan P et $M' = S_{(ox)}(M)$.

Notons que: $M' = S_{(ox)}(M)$ signifie $M'(x,-y)$.

$M \in (C_f)$ signifie $M(x , f(x))$.

$M' = S_{(ox)}(M)$ signifie $M'(x,-f(x))$

signifie $M' \in Cg$.

Ainsi le symétrique de M par rapport à (Ox) est un point de Cg. D'ou la construction de Cg.

3/ a. $h(x) = 3 - 2/3.x^2$ ainsi $h(x) = 3 + g(x)$

Soit $M(x,y)$ un point du plan.

$M \in (C_g)$ signifie $M(x , - 2/3.x^2)$.

Or $y = - 2/3.x^2$ donne $y + 3 = - 2/3.x^2 + 3$.

c'est à dire $y + 3 = h(x)$.

Soit M' un point appartenant à (C_h) donc $M'(x, h(x))$,

ou bien $M'(x, - 2/3.x^2 + 3)$.

$\overrightarrow{MM'} \binom{0}{3}$ c'est à dire $\overrightarrow{MM'} = 3\vec{j}$

Ainsi M' est l'image de M par la translation de vecteur $3\vec{j}$

b. $h(x) = 3 - 2/3.x^2$ et $f(x) = 2/3.x^2$

Pour trouver les coordonnés des points d'intersection de (C_f) et (C_h), s'ils existent; il suffit de résoudre l'équation $f(x) = h(x)$.
Les solutions éventuelles de cette équation sont les abscisses des points communs à (C_f) et (C_h) .
Résolvons cette équation :

$f(x) = h(x)$
$2/3\ x^2 = 3-2/3\ x^2$
$4/3\ x^2 = 3$
$x^2 = 9/4$
$x = 3/2$ ou $x = -3/2$
Or pour $x = 3/2$, $y = 3/2$ et pour $x = -3/2$, $y = 3/2$.

Conclusion:
(C_f) et (C_h) se coupent en deux points distincts de coordonnées (1.5 , 1.5) et (-1.5 , 1.5).

4/ La solution de cette question sera rédigée ultérieurement.

Exercice n°1:

Résoudre dans IR l'inéquation et l'équation suivantes:

$3\ x+ 4 = x - 2$

$m(x - 3) < m^2 - 3\ x$ (où m est un paramètre réel)

Exercice n°2:

On considère l'application suivante

$f : IR \longrightarrow IR$

$x \longmapsto |3 - 2x| - \sqrt{x^2 + 2x + 1}$

1) Montrer que f est une fonction affine par intervalles définie par:

$f(x) = -x + 4$ si $x \in]-\infty , -1]$

$f(x) = -3x + 2$ si $x \in [-1 , 3/2]$

$f(x) = x - 4$ si $x \in [3/2 , +\infty[$

2) Tracer le graphe de f dans un repère orthonormé.

3) a/ Résoudre graphiquement l'équation f(x) = 2

b/ Résoudre par le calcul l'équation f(x) = -1

c/ Déduire graphiquement les solutions de l'inéquation f(x)<-1

4) Déterminer graphiquement les valeurs de m pour lesquelles l'équation f(x) = m admet deux solutions positives.

Exercice n°3:

On considère un triangle ABC rectangle en A tel que BC = 8 cm
soit E le barycentre des points pondérés (C,1) et (B,3)
F le barycentre des points pondérés (C,-1) et (A,4) et I = B*C
1) Construire E
2) a) Exprimer CE à l'aide de CB et AC à laide de FC
b) Déduire que AE = FB
c) Construire alors le point F

3) Soit K le point défini par KA + 2 KE-2 KB=0

a) Justifier que 2 KE -2 KB=BI
b) Déduire que $t_{BC}(A) = K$

4) On suppose que B et C sont fixes et A est variable
a) Déterminer l'ensemble des points A
b) Déterminer l'ensemble des points K

5) Soit G le barycentre des points pondérés (A,4) et (B,3)
a) Montrer que G est le barycentre des points pondérés (E,4) et (F,3)
b) En déduire une construction de G6) Déterminer et construire les ensembles suivants:
E ={ M ∈P / || -MC + 4 MA || = AC
F ={ M ∈P / || MC + 3 MB ||= ||2MB - 2 CM||

Commentaire et indications:

Exercice N °1 : Pour résoudre cette équation ,on commence d'abord par les conditions d'existence suivantes ;
il faut que :3x+4≥0 et x+2≥0
signifie x≥-4/3 et x≥-2 donc x[∈-2,+ :∞
Résolution: on élève au carré les deux membres de cette égalité.
ExerciceN°2: $f(x)=|3-2x| - \sqrt{x^2+2x+1} =|3-2x| -| x+1|$ donc l'expression de f est donnée par :

$\rightarrow$ -x+4 si x ∈]-∞,-1]

$f(x) = \{$ $-3x+2$ si $x\in[-1,3/2]$

$\rightarrow$ $-x-4$ si $x[\in 3/2,+\infty[$

2) pour représenter graphiquement f on prend deux valeurs sur chacun des intervalles

3) résolution graphique de l'équation $f(x) = 2$ on trace la droite Δd'équation $f(x)= 2$ les solutions de cette équation sont les abscisses des points d'intersection de Δ et de la courbe de f

<u>ExerciceN°3 :</u>

1) La construction de E se fait à l'aide de la propriété de construction des barycentres: CE = 3./4CB

2) a)utiliser la propriété de construction des barycentres

c) (FB) || (AC) et F∈ (CA)

3) a) Utiliser la relation de Chasles au point B dans la relation donnée

4) a) A appartient au cercle C de diamètre [BC]

b) K appartient au cercle image de C par la translation t de vecteur ½ BC

5)b) la construction de G se déduit du fait que G appartient à la droite (AB) et (EF)

Profs : Ghazel Hadhom - Boubakri Ben temellist

Email