Série d'exercices
Etude de fonctions

EXERCICE N°1 :

Soit f la fonction définie par $f(x) = \dfrac{x}{1+x^2}$.

a) Trouver l'ensemble de définition de f.
b) Pour deux réels u et v, calculez f(u) – f(v).
c) Montrer que si u < v, le signe de f(u) – f(v) est celui de 1 – uv.
d) Montrer que si l'on a $0 < u \leq 1$ et $0 < v \leq 1$, alors $uv \leq 1$ et que si u >1 et v >1, alors uv > 1
e) Déduisons que f est strictement croissante sur [0 ;1] et strictement décroissante sur $[1 ;+\infty[$.
f) En procédant comme précédemment, étudier le sens de variation de f sur $]-\infty ;0]$.

EXERCICE N°2 :

A.a) Tracer dans un repère orthonormé $(O,\vec{i};\vec{j})$ la parabole P d'équation $y = x^2$.

a) Dessiner la droite D d'équation $y = -\dfrac{1}{4}$ et placer le point F de coordonnées $(0 ; \dfrac{1}{4})$.
b) Pour un point M du plan on note H le projeté orthogonal de M sur la droite D. Si M est un point de p, démontrer que MF = MH.
c) Réciproquement, M est un point de coordonnées (x, y) tel que MF = MH . Démontrer qu'alors $y = x^2$.

B. La parabole P est donc l'ensemble des points du plan équidistants de la droite D et du point F. Sachant cela, voici un procédé géométrique pour obtenir des points de P :

a) Tracer la droite D d'équation $y = -\dfrac{1}{4}$.
b) Placer le point $F(0, \dfrac{1}{4})$;
c) Placer un point H sur D et tracer Δ perpendiculaire en H à D.
d) Tracer la médiatrice de [FH] ; elle coupe Δ en M.
e) Vérifier que MF = MH ; donc M sur P.

EXERCICE N°3 :

Dans un repère orthonormé $(O,\vec{i};\vec{j})$ P la parabole d'équation $y = x^2$.

1.

a) D est la droite de coefficient directeur le réel m et qui passe par le point A(1 ;1).Montrer qu'une équation de D est y =m(x-1) +1.
b) Déterminer les coordonnées des points d'intersection de D et P.
c) Déterminer le réel m pour que la droite D coupe P en un unique point. Tracer P et la droite D correspondante à la valeur de m trouver.

2.

a) D est la droite dont une équation est y = 2x + b, où b est un réel. Construire D pour b = -2 et pour b = 3
b) Expliquer pourquoi, si P et D en des points commun, alors leurs abscisses sont solutions de l'équation $x^2 - 2x - b = 0$.

c) Déduisons que cette équation à des solutions si et seulement si $1 + b \geq 0$.

EXERCICE N°4 :

a) Représenter dans un repère orthonormé $(O,\vec{i};\ \vec{j})$ les fonctions suivantes

$$f : x \mapsto \frac{4}{x} \text{ et } g : x \mapsto x^2 - x.$$

b) Déterminer graphiquement les coordonnées du point d'intersection de ces deux courbes.

c) Déterminer une équation de la droite D passant par C(-1 ;2) et B(3 ;6). Tracer cette droite sue le schéma précédent.

d) Déterminer graphiquement les coordonnées des points d'intersection de D avec l'hyperbole représentant f.

e) Déterminer graphiquement l'ensemble de solution de chacune des inéquation

$$\frac{4}{x} \leq x+3 \ ; \ \frac{4}{x} \geq x^2 - x \ ; \ x+3 \geq x^2 - x.$$

f) Déduisez-en l'ensemble des solution de chacun des systèmes suivants :

$$\begin{cases} x^2 - 2x - 3 \leq 0 \\ x^3 - x^2 - 4 \leq 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad x^2 - x \leq \frac{4}{x} \leq x+3$$

EXERCICE N°5 :

Dans un repère orthonormé $(O,\vec{i};\ \vec{j})$, H est l'hyperbole d'équation $y = \frac{a}{x}$ où a est un réel non nul.

M_1 et M_2 sont les points de H d'abscisses x_1 et x_2 (avec $x_1 < x_2$. la sécante (M_1M_2) coupe l'axe des abscisses en I et l'axe des ordonnées en J.

a) Représenter cette situation dans chacun des cas : x_1 et x_2 de même signe ; x_1 et x_2 sont de signe contraires.

b) Déterminer les coordonnées de M_1, M_2, I et J.

c) Montrer que les segments [IJ] et $[M_1M_2]$ ont même milieu. Déduisez-en que $\overrightarrow{JM_1} = \overrightarrow{M_2I}$.

d) Construction de l'hyperbole passant par un point M_1 et d'asymptotes les axes.

M_1 est un point du plan ; D est une droite qui passe par M_1 et coupe l'axe des abscisses en I et l'axe des ordonnées en J.

Placer le point M_2 tel que $\overrightarrow{JM_1} = \overrightarrow{M_2I}$. Recommencer un grand nombre de fois pour construire avec précision cette hyperbole.

EXERCICE N°6:

1. $(O,\vec{i};\ \vec{j})$ est un repère orthonormé et C est la courbe d'équation $y = x^2 - 4x + 6$.

O'est le point de coordonnées (2 ;2).

Quelle est l'équation de C dans le repère $(O',\vec{i};\ \vec{j})$? Tracer alors cette courbe.

2. Soit les points A(0 ; 2), B(4 ; 3) et M(x ;0) Dans le repère $(O,\vec{i};\ \vec{j})$.

a) Déterminer le réel f(x) égale à $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}$.

b) En remarquant que pour tout réel x : $x^2 - 4x + 6 = (x - 2)^2 + 2$; déterminer le point M de l'axe des abscisses tel que $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}$soit minimum.

c) Déduisez-en que, quel que soit le point M de l'axe des abscisses, l'angle $\widehat{AMB}$est aigu.