Fonctions Polynômes : Exercices

Exercice 1

Calculer $x_1^2 + x_2^2$ et $x_1^3 + x_2^3$ où x_1 et x_2 sont les deux racines de $ax^2 + bx + c$.

Exercice 2

La fonction f définie par : $\begin{cases} x - y = 15 \\ xy = -56 \end{cases}$ est-elle polynomiale ?

Exercice 3

La fonction f : $x \longmapsto \begin{cases} f(x) = \dfrac{x^n - 1}{x - 1} \text{ pour } x \neq 1 \\ f(1) = n \end{cases}$ est-elle polynomiale ?

Exercice 4

Soit P une fonction polynôme de degré n, $n \geqslant 1$.

1. Montrer que si P a n racines distinctes a_1, ... a_n, alors il existe une fonction polynôme Q telle que pour tout réel x, on ait : $P(x) = (x - a_1)(x - a_2)...(x - a_n)\,Q(x)$.
2. En déduire que toute fonction polynôme de degré n a au plus n racines distinctes.
3. La fonction f : $x \longmapsto \sin x$ est-elle polynomiale ?

4. Existe-t-il une fonction polynôme P non nulle telle que pour tout $x \neq 0$, $x^5 P\sqrt{x^2+1} = P(x-1)$ et telle que 1 soit racine de P ?

Pour répondre à la question, on montrera que :

- si P existe, deg $P \leqslant 5$;
- $\left(\dfrac{1}{x}\right)$ et $\dfrac{1}{2}$ sont racines de P ;
- il existe six racines distinctes de P.

Exercice 5

Soient A, B, C trois villes telles que : d(A, B) = d(B, C). Deux voitures se rendent de A à C en passant par B. La première va à la vitesse v de A à B, puis deux fois plus vite ensuite. La deuxième va de A à B à 48 km/h de moyenne, puis roule à la vitesse (v + 20) entre B et C.

Les deux voitures mettent le même temps : calculer v.

Exercice 6

Voici une conversation entre deux amis dans la petite salle de séjour de l'un d'eux :

- Tiens, tu as posé de la moquette et une corniche au plafond. Cela t'a coûté cher ?
- Ah, secret ! Je le dirai seulement que le prix au mètre de la corniche était deux fois plus élevé que le prix au mètre carré de la moquette, mais que j'ai payé exactement la même somme pour les deux matériaux.

Après un instant de réflexion, l'ami remarque :

- Tu ferais peut-être mieux d'examiner de près ta facture.

Expliquer pourquoi.

Exercice 7

Le livre de mathématiques de première S a la forme d'un parallélépipède rectangle d'arêtes de longueurs a, b et c. Son volume vaut V = 792 cm^3, la somme des aires de ses faces vaut S = 954 cm^2 et la somme des longueurs de ses arêtes vaut P = 170 cm.

Retrouver les dimensions du livre (on pourra développer le polynôme $Q(x) = (x - a)(x - b)(x - c)$ et trouver l'épaisseur du livre comme racine évidente de Q).

Exercice 8

Soit une fonction polynôme P et soit $\Delta(P)$ la fonction polynôme : $x \longmapsto P(x + 1) - P(x)$.
1. Calculer $\Delta(P)$ lorsque P est un polynôme de degré 0, de degré 1, de degré 2.
Comparer deg $\Delta(P)$ et deg P sur ces trois cas particuliers.
Formuler un résultat général reliant deg $\Delta(P)$ et deg P si deg P $\geqslant 1$ et démontrer ce résultat.
2. Montrer que $\Delta^2(P) = \Delta(\Delta(P))$ est la fonction polynôme :
$x \longmapsto P(x + 2) - 2P(x + 1) + P(x)$.
Donner une expression analogue pour $\Delta^3(P) = \Delta(\Delta(\Delta(P)))$.
3. Que peut-on dire de $\Delta^3(P)$ lorsque deg P = 2, puis lorsque deg P = 3 ?
4. Montrer que pour toute fonction polynôme P de degré 3, on a pour tout réel x :
$P(x + 4) + 6P(x + 2) + P(x) = 4[P(x + 3) + P(x + 1)]$.
5. Application.
Existe-t-il une fonction polynôme P de degré 3 vérifiant :
$P(-3) = P(-1) = P(1)$
$P(-2) = P(0)$.

Exercice 9

On appelle polynôme symétrique un polynôme dont les coefficients peuvent se lire indifféremment dans un sens comme dans l'autre.
Exemple : $f(x) = 3x^4 + x^3 - x^2 + x + 3$.
Nous allons voir des méthodes permettant de résoudre l'équation $f(x) = 0$.
A. Degré 2. Soit : $f: x \longmapsto ax^2 + bx + a$, $a \neq 0$.
Résoudre l'équation $f(x) = 0$ et dans le cas où f admet deux racines distinctes, les comparer.
B. Degré 3. Soit : $f: x \longmapsto ax^3 + bx^2 + bc + a$, $a \neq 0$.
1. Montrer que 0 n'est pas racine de f et que si x_1 est racine de f, alors $\frac{1}{x_1}$ est aussi racine de f.
2. Trouver une racine évidente de f et en déduire une factorisation de f(x). Discuter alors le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 0$.
3. **Application**
$f: x \longmapsto 7x^3 - 43x^2 - 43x + 7$.
Résoudre l'équation $f(x) = 0$ et factoriser f(x).
C. Degré 4. Soit : $f: x \longmapsto ax^4 + bx^3 + cx^2 + bx + a$, $a \neq 0$.
1. Même question que B. a).
2. Soit $y = x + \left(\frac{1}{x}\right)$.
Calculer y^2 et en déduire l'expression de $g(x) = \frac{f(x)}{x^2}$ en fonction de a, b, c, y et y^2 (ceci pour $x \neq 0$).
Montrer que résoudre $f(x) = 0$ revient à résoudre successivement deux équations du second degré.
Montrer que si $b^2 < 4a(c - 2a)$, $f(x) = 0$ n'a pas de solution.
3. **Application**
Résoudre l'équation : $12x^4 + 11x^3 - 146x^2 + 11x + 12 = 0$.

Exercice 10

1. Trouver une fonction polynôme P, de degré $\leqslant 2$, telle que

$$P(-1) = 14,\ P(2) = 5,\ P(3) = 18.$$

P est-elle unique ? Si oui, pourquoi ? Sinon, trouver toutes les fonctions polynômes de degré $\leqslant 2$ vérifiant les mêmes conditions.
2. Reprendre la question a) pour les fonctions polynômes de degré $\leqslant 2$ qui vérifient :

$$P = -\frac{1}{2} = \frac{5}{2} \text{ et } P(-3) = -5.$$

3. Soit a, b, c, d quatre réels donnés. Montrer que s'il existe une fonction polynôme P de degré 3

vérifiant $P(-2) = a$, $P = b$, $P = c$ et $P(100) = d$, alors elle est unique.
4. Montrer qu'il existe quatre réels α, β, γ, δ tels que la fonction polynôme P définie par :

$$P(x) = \alpha(x - \frac{1}{2})(x - (\sqrt{2}))(x - 100) + \beta(x + 2)(x - (\sqrt{2}))(x - 100) + \gamma(x + 2)(x - \frac{1}{2})(x - 100) + \delta(x + 2)(x - \frac{1}{2})(x - (\sqrt{2}))$$

soit la solution du problème.
Le polynôme obtenu s'appelle le **polynôme d'interpolation de Lagrange**.

5. Généraliser les questions c) et d) en remplaçant -2, $\frac{1}{2}$, $(\sqrt{2})$, 100 par des valeurs quelconques x_1, x_2, x_3, x_4 deux à deux distinctes.
6. Généraliser à la recherche des fonctions polynômes P de degré $\leqslant n$ vérifiant $P(x_1) = a_1$, $P(x_2) = a_2$, …, $P(x_{n+1}) = a_{n+1}$ où x_1, …, x_{n+1} sont des réels donnés deux à deux distincts et où a_1, …, a_{n+1} sont des réels donnés quelconques.

Exercice 11

Dossier d'Interpol (utiliser l'exercice 10).
La société secrète du «troisième degré» se livre à de redoutables activités et ses membres se reconnaissent grâce à un code numérique qui change chaque mois suivant une formule connue d'eux seuls.
A Interpol, le commissaire Lagrange n'a pas beaucoup d'éléments pour son enquête : il sait seulement que les codes pour les 3^e^, 5^e^, 6^e^ et 8^e^ mois étaient respectivement 729, 1313, 901 et 1014.
Néanmoins, le nom de la société secrète lui donne une idée. Il va découvrir la formule, et connaissant le code pour le 10^e^ mois, il va s'infiltrer dans la société et arrêter peu à peu tous ses membres.
Quelle est la formule ? Quel est le code du 10^e^ mois ?

Exercice 12

Déterminer le polynôme P(x) de degré 3 tel que :
$P(1) = -\frac{3}{4}$; $P(2) = 1$; $P(3) = \frac{29}{4}$ et $P(4) = 21$.