

## Les Fonctions Polynômes : Exercices



### Exercice 1

Cocher la réponse exacte.

I. Comment s'écrivent ces expressions ?

	A	B	C
1. $(2x - 1)^2 - 4(x - 2)^2$	$2(x + 1)^2$	$3(4x - 5)$	$4(x - 1)(x - 2)$
2. $4(x - 1)^2 - (x - 3)^2$	$(x + 1)(3x - 5)$	$(x + 1)(x - 7)$	$3(x + 2)$

II. Quel ensemble de solutions admettent ces équations ?

	A	B	C
3. $5x^2 - 20x = 0$	$\{3 ; 0\}$	$\{1 ; -2\}$	$\{0 ; 4\}$
4. $3x^2 + 27 = 0$	$\{1\}$	$\{-3 ; 3\}$	$\emptyset$
5. $9(3x + 5)^2 - (x - 1)^2 = 0$	$\{1 ; 3\}$	$\left\{-2; -\frac{7}{5}\right\}$	$\{-2 ; -1\}$
6. $4x^2 + 4x + 1 = 0$	$\left\{-\frac{1}{2}\right\}$	$\{1 ; 2\}$	$\emptyset$

III. Quel ensemble de solutions admettent ces inéquations ?

	A	B	C
7. $5x^2 - 20 \leq 0$	$\emptyset$	$[0 ; 4]$	$] -\infty ; 2[$
8. $(2x - 1)^2 - 4(x - 2)^2 \geq 0$	$[1 ; 2]$	$] -\infty ; 3[$	$\left[\frac{5}{4} ; +\infty\right[$
9. $4(x - 1)^2 - (x - 3)^2 \geq 0$	$\emptyset$	$\left[-1; \frac{5}{3}\right]$	$] -\infty ; -1] \cup \left[\frac{5}{3} ; +\infty\right[$
10. $x^2 + 1 \geq 2x$	<b><math>\mathbb{R}</math></b>	<b><math>\mathbb{R} - \{1\}</math></b>	$]1 ; +\infty[$



### Exercice 2

Les fonctions suivantes sont-elles des fonctions polynômes ?

1.  $f: x \mapsto 4x^2 + x + 1 ;$

$$\frac{x^2 - 6x + 9}{x - 3}$$

2.  $g: x \mapsto \frac{x - 3}{x^2 + 4x} ;$

3.  $h: x \mapsto \sqrt{x^2 + 4x} .$



### Exercice 3

Déterminer le degré et les coefficients des fonctions polynômes suivantes, après les avoir écrites sous forme réduite et ordonnée :

$f_1: x \mapsto (x - 1)^2 - 4(2x - 3)(x + 2)^2 + 3(x - 4)(x + 2)$

$f_2: x \mapsto (2x - 1)^3 - 2(2x + 3)(x - 4)^2 - 4(x - 1)^2(x + 3)$

$f_3: x \mapsto (2x^3 + 2x - 1)(4x^4 + 5x^2 + 3).$

### Exercice 4

On donne les fonctions polynômes :

$$\begin{cases} f : x \mapsto 2x^3 - 5x + 1 \\ g : x \mapsto 3x^4 - 2x^2 + 7x - 3 \end{cases}$$

Exprimer  $f + g$ ,  $f \cdot g$ ,  $2f - 3g$ ,  $f^2 (= f \cdot f)$ .

### Exercice 5

Un texte de devoir est mal écrit, et les coefficients en  $x^3$  et en  $x$  d'une fonction polynôme ont été effacés. On ne voit que  $p(x) = x^4 + \dots x^3 - 2x^2 + \dots x - 3$ .

La première question du problème est : vérifier que  $-1$  et  $3$  sont racines de la fonction polynôme  $p$ . Comment retrouver les coefficients effacés ?

### Exercice 6

Soit les fonctions polynômes :

$$\begin{cases} p(x) = x^4 - 6x^3 + 19x^2 - 25x + 24 \\ q(x) = (ax^2 + bx + c)^2 + dx + e \end{cases}$$

Quels sont les réels  $a$ ,  $b$ ,  $c$ ,  $d$ ,  $e$  tels que  $p$  et  $q$  soient égales ?

### Exercice 7

#### Discriminant réduit

Soit l'équation  $ax^2 - 2b'x + c = 0$  et soit  $\delta' = b'^2 - ac$ .

En utilisant les résultats de cours, discuter suivant le signe de  $\delta'$  le nombre de solutions, et, lorsqu'elles existent, exprimer celles-ci en fonction de  $\delta'$ ,  $a$  et  $b'$ .

### Exercice 8

1. Soit  $p: x \mapsto x^3 - 3x^2 - 13x + 15$ .

Chercher une racine évidente de  $p$ , puis résoudre dans  $\mathbb{R}$  l'équation  $p(x) = 0$ .

2. Soit  $p: x \mapsto 4x^3 - 8x^2 - 47x + 105$ . Calculer  $p(3)$  et en déduire la résolution dans  $\mathbb{R}$  de l'équation  $p(x) = 0$ .

3. Même travail avec  $p: x \mapsto x^3 + 7x^2 + 12x + 10$  et  $p(-5)$ .

4. Soit  $p: x \mapsto 9x^4 - 12x^3 - 83x^2 - 50x - 8$ . Calculer  $p(4)$  et en déduire une première factorisation de  $p(x)$ . Chercher une racine évidente de  $p$ , puis résoudre  $p(x) = 0$ .

### Exercice 9

Résoudre dans  $\mathbb{R}$  les équations :

$$7x^2 - 12x + 5 = 0 \text{ et } 7x^2 + 12x + 5 = 0.$$

Comparer les solutions des deux équations.

Ne pouvait-on pas prévoir ce résultat ?

### Exercice 10

Trouver trois entiers consécutifs dont la somme des carrés est 509.

### Exercice 11

Résoudre dans  $\mathbb{R}$  les équations suivantes :

1.  $x^4 - 2x^2 - 8 = 0$  ;

2.  $3x^4 - 11x^2 + 6 = 0$  ;

$$3. 2x + 5\sqrt{x} - 3 = 0 ;$$

$$4. \frac{1}{x+4} - \frac{3}{3x-5} = \frac{7}{10-7x} + \frac{3}{3x+20} .$$

### Exercice 12

Le nombre d'or est la solution positive de l'équation  $x^2 - x - 1 = 0$  ; on le note  $\alpha$ .

1. Calculer  $\alpha$ .

2. Montrer que  $\alpha^2 = 5\alpha + 3$  et  $\frac{1}{\alpha^2} = 2 - \alpha$ .

### Exercice 13

Résoudre dans  $\mathbb{R}$  les inéquations suivantes :

1.  $2x^2 + 7x - 4 \geq 0$  ;

2.  $x^2 - 15x + 50 < 0$  ;

3.  $3x^2 + 20x + 50 > 0$  ;

4.  $\frac{2}{x-3} + \frac{4}{x-2} \leq 3$

### Exercice 14

Résoudre dans  $\mathbb{R}$  le système :

$$\begin{cases} x + y = 15 \\ xy = 56 \end{cases}$$

En déduire les solutions du système :

$$\begin{cases} x - y = 15 \\ xy = -56 \end{cases}$$

### Exercice 15

La somme des âges de deux amis est 53 ans. Dans cinq ans, le produit de leurs âges sera 990. Quels sont leurs âges ?

### Exercice 16

Quelles sont les dimensions d'une boîte parallélépipédique à base carrée dont le volume est  $V = 1875 \text{ cm}^3$  et telle que la surface de carton employée est  $S = 950 \text{ cm}^2$ . (On se ramènera à une équation du troisième degré dont on cherchera une racine évidente.)