Mathématiques

Devoir de Synthèse N° 2

3ème Maths : M2 — Date : le 05 / 03 / 2010	Durée : 3heures — Coefficient : 4	Enseignant : M. Ghadhab Lassad

Le sujet comporte 6 pages

Exercice N°1 : 4 points

Soit (U_n) la suite réelle définie sur ℕ par : $\begin{cases} U_0 = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ U_{n+1} = \sqrt{\dfrac{1-U_n}{2}} \end{cases}$

1) On considère la suite (V_n) définie sur ℕ par : $\begin{cases} V_0 = \dfrac{\pi}{3} \\ V_{n+1} = \dfrac{\pi}{4} - \dfrac{1}{2}V_n \end{cases}$

Montrer par récurrence que pour tout $n \in$ ℕ, on a : $0 \le V_n \le \dfrac{\pi}{2}$.

2) On considère la suite (W_n) définie sur ℕ par : $W_n = V_n - \dfrac{\pi}{6}$.

$a-$ Montrer que (W_n) est une suite géométrique de raison $\left(\dfrac{-1}{2}\right)$.

$b-$ Pour tout n de ℕ, exprimer W_n puis V_n en fonction de n.

$c-$ Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} V_n$.

3) $a-$ Ecrire sous forme $rCos\left(\dfrac{1}{2}x-\alpha\right)$ l'expression suivante : $Cos(\dfrac{1}{2}x) - Sin(\dfrac{1}{2}x)$.

$b-$ Vérifier que $\left(Cos(\dfrac{1}{2}x) - Sin(\dfrac{1}{2}x)\right)^2 = 1 - Sinx$

$c-$ Montrer que pour tout $x \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ on a : $\sqrt{\dfrac{1-Sinx}{2}} = Sin\left(\dfrac{\pi}{4} - \dfrac{1}{2}x\right)$.

4) $a-$ Montrer par récurrence que pour tout $n \in$ ℕ , on a : $U_n = Sin(V_n)$.

$b-$ En déduire, pour tout entier naturel n, l'expression de U_n en fonction de n.

Exercice N°2 : 5 *points*

Le plan est orienté dans le sens direct, on considère un triangle ABC isocèle rectangle tel que :
$\left(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}}\right) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$.
I, J et K sont les milieux respectifs des segments $[BC]$, $[AC]$ et $[AB]$. (**Figure page 5 annexe**).

I –

1) a – Montrer qu'il existe une unique rotation R tel que : $\begin{cases} R(A) = I \\ et \\ R(I) = C \end{cases}$.

   b – Déterminer son centre et une mesure de son angle.

On suppose dans la suite de l'exercice que : $R = R_{\left(J, \frac{\pi}{2}\right)}$

2) Soit D le symétrique de I par rapport à J. Montrer que $R(C) = D$.

3) Soit M un point du segment $[IC]$. La perpendiculaire à (AM) passant par I rencontre (CD) en P.
   a – Déterminer $R((AM))$
   b – En déduire que $R(M) = P$.

II – On pose : $R' = S_{(IA)} \circ S_{(IJ)}$ et $f = R' \circ \mathrm{R}$.

1) a – Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de R'.
   b – Montrer que $R = S_{(JI)} \circ S_{(JK)}$.
   c – En déduire que f est une symétrie centrale dont on précisera le centre.

2) a – Construire $M' = R'(P)$ et déterminer $f(M)$.
   b – Quelle est la nature du quadrilatère $KMJM'$? Justifier.

Exercice N°3 : *5 points*

I – Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=\dfrac{x^2}{\sqrt{x^2+1}}$

On désigne par C_f sa courbe représentative dans le plan rapporté à un repère orthonormé $R=(O,\vec{i},\vec{j})$.

1) Montrer que la fonction f est paire.
2) a – Montrer que pour tout $x\in\left]0,+\infty\right[$ on a : $f(x)-x=\dfrac{-1}{\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\sqrt{\dfrac{1}{x^2}+1}}$

   b – En déduire que la courbe C_f admet une asymptote oblique $\Delta : y=x$ au voisinage de $+\infty$.

   c – Etudier la position de C_f par rapport à Δ pour $x\in\left]0,+\infty\right[$.

3) a – Montrer que pour tout $x\in\mathbb{R}$, on a : $f'(x)=\dfrac{x\left(x^2+2\right)}{\left(x^2+1\right)\sqrt{\left(x^2+1\right)}}$

   b – Dresser le tableau de variation de f.

4) Tracer la droite Δ et la courbe C_f (**page 5 annexe**).

II – Soit la suite (U_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $\begin{cases} U_0=\dfrac{1}{2} \\ U_{n+1}=f(U_n) \end{cases}$

1) Montrer par récurrence que pour tout $n\in\mathbb{N}$, on a : $0<U_n<1$.
2) a – Montrer que pour tout $x\in\left]0,1\right[$, on a : $0<\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}<\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

   b – En déduire que pour tout $n\in\mathbb{N}$, on a : $0<U_{n+1}<\dfrac{1}{\sqrt{2}}U_n$.

   c – Montrer alors que $\forall x\in IN$ on a $0<U_n<\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^n$

   d – Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$.

Exercice N° 4: *6 points*

I – Soit la fonction $f : x \mapsto \dfrac{2x^2 + ax + b}{x - 2}$ où a et b sont des réels.

On désigne par C_f sa courbe représentative dans le plan rapporté à un repère orthonormé $R = \left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

1) Montrer que pour tout $x \neq 2$, $f'(x) = \dfrac{2x^2 - 8x - 2a - b}{(x-2)^2}$.

2) Déterminer a et b pour que la courbe C_f admette en $A(1,-3)$ une tangente parallèle à l'axe des abscisses.

II – Dans la suite on prend : $f(x) = \dfrac{2x^2 - 7x + 8}{x - 2}$

1) a – Ecrire $f(x)$ sous la forme $f(x) = a'x + b' + \dfrac{c'}{x-2}$ où a', b' et c' sont des réels qu'on déterminera.

   b – En déduire que la droite $\Delta : y = 2x - 3$ est une asymptote à C_f.

2) Soient le point $I(2,1)$ et le vecteur $\vec{u} = \vec{i} + 2\vec{j}$

   a – Ecrire une équation cartésienne de C_f dans le repère $R' = \left(I, \vec{u}, \vec{j}\right)$.

   b – Montrer que I est un centre de symétrie de C_f

3) Etudier f et tracer C_f (**page6 annexe**).

III – Soit la fonction g définie par $g(x) = \dfrac{2x^2 - 4x - 3|x-1| + 5}{|x-1| - 1}$

On désigne par C_g sa courbe représentative dans le repère R.

1) Déterminer le domaine de définition de g.

2) Montrer que la droite D dont une équation est $x = 1$ est un axe de symétrie de C_g

3) Déterminer l'expression de $g(x)$ pour $x \in [1, +\infty[\setminus \{2\}$.

4) A partir de C_f tracer C_g dans le repère R.

Feuille à rendre avec la copie

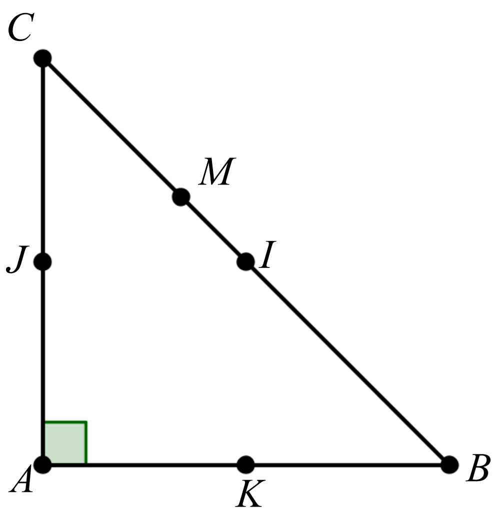
Nom : ……………………..…….

Prénom : ……………………….…..

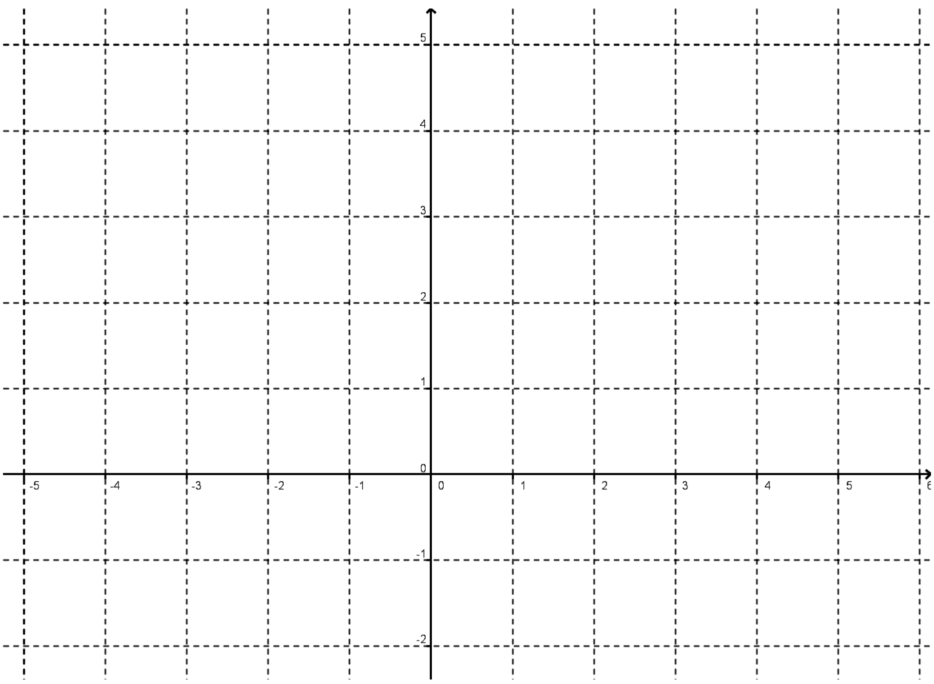
N° : ……

3 maths : 2

Exercice N° 2:



Exercice N° 3:



Exercice N° 4: