Lycée : Habib Thamer *Classe :3 ème Math*	**SERIE D' EXERCICES N°(16)** *Arithmétique*	*Prof : Regaig Farhat* *Ascolaire :* **2008/2009**

Exercice 1 : Vrai-faux.

Justifier chaque affirmation, par une démonstration ou présenter un contre exemple.

1) L'égalité 31 = 3 × 9 + 4 permet d'affirmer que :
   a) 4 est le reste de la division euclidienne de 31 par 9.
   b) 4 est le reste de la division euclidienne de 31 par 3.
2) Si a|9 et a|4, alors a|31.
3) Le nombre de diviseurs d'un entier naturel non nul est toujours pair.
4) 2 est toujours un diviseur du produit de deux entiers consécutifs.
5) 3 est toujours un diviseur du produit de trois entiers consécutifs.
6) 3 est toujours un diviseur du produit de trois entiers impairs distincts.
7) Si d est un diviseur de a, alors d^2 est un diviseur de a^2.
8) Dans la division euclidienne de 229 par 12, le quotient est 18 et le reste 13.
9) Le reste dans la division euclidienne de 2013 par 8 est 5.
10) L'égalité 3754 = 123 × 29 + 187 permet de définir une division euclidienne.
11) Dans la division euclidienne par l'entier naturel n, il existe exactement n valeurs possibles pour le reste.
12) Si r est le reste de la division euclidienne de a par n, alors r + 1 est le reste de la division euclidienne de a + 1 par n.
13) Si r est le reste de la division euclidienne de a par n, alors r^2 est le reste de la division euclidienne de a^2 par n.
14) Si le reste est nul dans la division euclidienne de a par b, alors a est un multiple de b.
15) On donne la division euclidienne de 3619 par 35 : 3619 = 35 × 103 + 14
   a) Le dernier reste non nul de l'algorithme d'EUCLIDE appliqué à 3619 par 35 est 7.
   b) Les diviseurs naturels communs à 3619 et 35 sont 1 et 7.
   c) 3619 et 35 possèdent quatre diviseurs communs.
   d) 1 est le seul diviseur commun à 3619 et 103.
16) PPCM (3 ; 16) = 32.
17) PPCM (6 ; 12) = 72
18) Pour tout entier naturel n ;
   a) PPCM (n ; 2n +1) = n (2n + 1)
   b) PPCM (n – 1 ; n + 1) = $n^2 - 1$
19) Si $n = 3^{24} \times 5$ et $m = 3^7 \times 7$ alors PPCM (m ; n) = 7n
20) Un entier divisible par 4 et 15 est aussi divisible par 60.
21) Si les entiers m et n vérifient
22) 1111m = 1515n,
23) alors m est un multiple de 1515.
24) Le PGCD de 2001^{2007} et de 2007^{2001} est 3^{1995}.
25) Le reste de la division de 2^{100} par 11 est égal à 1.

Exercice 2 :

1) Montrer que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $n^3 + 5n$ est un multiple de 6.
2) En déduire que les entiers suivants sont multiples de 6 : $n^3 + 17n - 12$; $n^3 + 2009n$

Exercice 3 :

1) Résoudre dans l'ensemble des entiers naturels non nuls, $\begin{cases} a + b = 56 \\ \text{ppcm}(a, b) = 105. \end{cases}$
2) Résoudre dans l'ensemble des entiers naturels non nuls, $\begin{cases} \text{pgcd}(a, b) = 56 \\ \text{ppcm}(a, b) = 108. \end{cases}$

Exercice 4 :

Déterminer tous les couples (a,b) d'entiers naturels tels que PGCD(a, b) + PPCM(a,b) = b + 9.

Exercice 5 :

1) Déterminer les diviseurs de 25.
2) Déterminer les entiers naturels a et b tels que $a^2 - b^2 = 25$

Exercice 6 :

Soit a et b deux entiers naturels.
Montrez que, si 3 divise $a^3 + b^3$, alors 3 divise $(a + b)^3$.

Exercice 7 :

1) Déterminer les diviseurs de 98.
2) Déterminer les entiers naturels a et b tels que $a^3 - b^3 = 98$.

Exercice 8 :

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à deux.

1) Développer $(n + 1)^n$ par la formule du binôme de Newton.
2) Soit $A_n = (n + 1) n - 1$ .Montrer que n^2 divise A, et déterminer le quotient de la division euclidienne de A_n par n^2 .

Exercice 9 :

1) Soit x un entier naturel. Montrer que $x + 1$ divise $x^3 + 1$.
2) Montrer, par récurrence sur k, que : si $k \geq 1$, 3^k divise $2^{3k} + 1$.

Exercice 10 :

1) Montrer que, quels que soient pour tout entier les entiers naturels a, b, n, $a - b$ divise $a^n - b^n$
2) En déduire que, naturel n pair, 3 divise $2^n - 1$.
3) Montrez alors que, pour tout $n \geq 1$ $A_n = \dfrac{2^{2^{n+1}} + 2^{2^n} + 1}{3}$ est un entier naturel.

Exercice 11 :

n et c deux entiers naturels non nuls, le but de l'exercice est de comparer le pgcd de (cn) et de $2n + 1$ au pgcd de c et de $2n + 1$, puis de déterminer selon les valeurs de n, le pgcd des deux nombres : $A = 3n$ et $B = 2n + 1$

1) Démontrer que n et $2n + 1$ sont premiers entre eux.
2) Démontrer que pour tout entier naturel non nul c le pgcd de (cn) et de $2n + 1$ est égal au pgcd de c et de $2n + 1$.
3) En déduire que le pgcd de A et B est le pgcd de 3 et de $2n + 1$.
4) Déterminer le pgcd de 3 et $2n + 1$ selon les valeurs de n en utilisant par exemple, les trois valeurs possibles du reste dans la division
5) euclidienne de n par 3.

Exercice 12 :

Pour tout entier naturel $n \geq 5$, on considère les nombres : $a = n^3 - n^2 - 12n$ et $b = 2n^2 - 7n - 4$

1) Montrer, après factorisation, que a et b sont des entiers naturels divisibles par $n - 4$.
2) On pose $\alpha = 2n + 1$ et $\beta = n + 3$. On note d le PGCD de α et β.
   a) Etablir une relation entre α et β indépendante de n.
   b) Démontrer que d est un diviseur de 5.
   c) Démontrer que les nombres α et β sont multiples de 5 si, et seulement si, $n-2$ est multiple de 5
3) Montrer que $2n + 1$ et n sont premiers entre eux.
4) Déterminer, suivant les valeurs de n et en fonction de n le PGCD de a et b.

Exercice 13 :

Pour tout entier naturel n non nul, soient les nombres entiers: $a_n = 4 \times 10^n - 1$; $b_n = 2 \times 10^n - 1$; $c_n = 2 \times 10^n + 1$.

1) Montrer que, pour tout entier naturel non nul n, a_n et c_n sont divisibles par 3 et b_n n'est pas divisible par 3.
2) En utilisant la liste des nombres premiers inférieurs à 100, étudier si b_3 est premier.
3) Montrer que, pour tout entier naturel n non nul, $a_{2n} = b_n\, c_n$. En déduire la décomposition de a_6 en produit de facteurs premiers.
4) a) Montrer que, pour tout entier naturel n non nul: PGCD (b_n ; c_n) = PGCD (c_n ; 2).
   b) En déduire que b_n et C_n sont premiers entre eux.

Exercice 14 :

Partie A : Soit x un nombre réel.

1) Montrer que $x^4 + 4 = (x^2 + 2)^2 - 4x^2$
2) En déduire que $x^4 + 4$ peut s'écrire comme produit de deux trinômes à coefficients réels.

Partie B : Soit n un entier naturel supérieure ou égal à 2. On considère les entiers : $A = n^2 - 2n + 2$ et $B = n^2 + 2n + 2$ et d leur PGCD. Montrer que $n^4 + 4$ n'est pas premier.

1) Montrer que tout diviseur de A qui divise n, divise 2.
2) Montrer que tout diviseur commun à A et B, divise 4n.
3) Dans cette question, on suppose que n est impair.
   a) Montrer que A et B sont impairs. En déduire que d est impair.
   b) Montrer que d divise n.
   c) En déduire que d divise 2, puis que A et B sont premiers entre eux.
4) On suppose maintenant que n est pair.
   a) Montrer que 4 ne divise pas $n^2 - 2n + 2$
   b) Montrer que d est de la forme $d = 2p$ avec p impair.
   c) Montrer que p divise n. En déduire que $d = 2$. (On pourra s'inspirer de la démonstration utilisée à la question 4).

Exercice 15 :

1) Soit E = {l ; 2; 3 ; 4; 5 ; 6; 7 ; 8; 9 ; 10}.Déterminer les paires {a ; b} d'entiers distincts de E tels que le reste de la division euclidienne de ab par 11 soit 1
2) Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 3.
   a) L'entier $(n - 1)! + 1$ est-il pair?
   b) L'entier $(n - 1)! + 1$ est-il divisible par un entier naturel pair?
   c) Prouver que l'entier $(15 - 1)! + 1$ n'est pas divisible par 15.
   d) L'entier $(11 - 1)! + 1$ est-il divisible par 11 ?
3) Soit p un entier naturel non premier ($p \geq 2$).
   a) Prouver que p admet un diviseur q ($1 < q < p$) qui divise $(p - 1)$!
   b) L'entier q divise-t-il l'entier $(p - 1)! + 1$?
   c) L'entier p divise-t-il l'entier $(p - 1)! + 1$?