Débuter le dénombrement

Compter ou dénombrer ?

Le dénombrement est l'action de recenser, d'inventorier. Malgré toute apparence il est à opposer au mot compter qui nécessite un calcul, donc des structures algébriques faisant intervenir une loi (addition, multiplication ou autre).

On dit qu'on dénombre un ensemble quand il est possible de mettre chaque élément de l'ensemble en relation (bijective) avec un nombre entier. Le cardinal de l'ensemble est alors l'entier qui correspond au nombre d'élément(s) qui compose l'ensemble. On note card(A) ou |A| l'entier qui correspond au cardinal de l'ensemble A.

Pour des enfants entre 3 et 4 ans, on peut observer que le dénombrement s'acquiert avant le comptage : l'exercice consistant à mettre en relation la face d'un dé composé de points avec un ensemble à 1,2,3,4,5 ou 6 éléments se met en place très rapidement (**voir exercice**). Mais l'exercice de comptage qui consiste à donner des maisons pêle-mêle que les enfants doivent découper et placer une à une dans les cases est plus difficile.

Les différents types d'ensembles et leurs cardinaux :

- L'ensemble A ci-dessus ne contient que quatre éléments on note algébriquement A={a,b,c,d} et *card* (A) = 4. (fig. A)

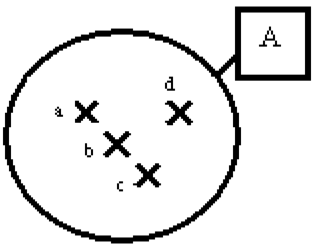


fig. A

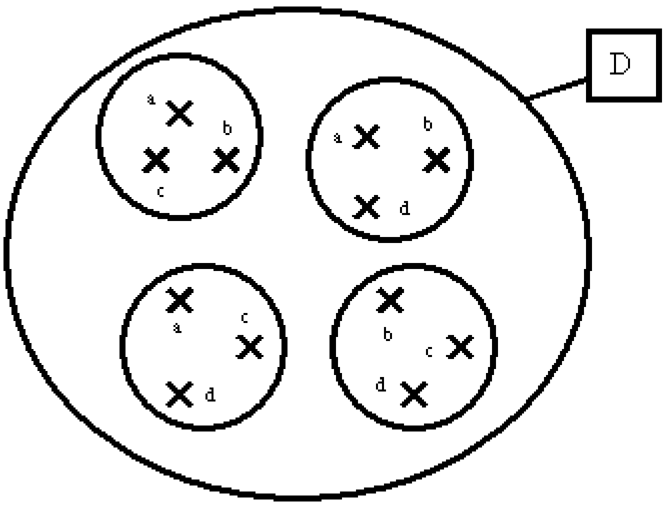


fig. D

- Imaginons un antivol de vélo à 3 codes pouvant faire intervenir n'importe quel élément de l'ensemble A et qui s'ouvrirait par la combinaison ordonnée (d,a,a) dite aussi triplet. L'ensemble des codes de l'antivol peut être noté B={(a,a,a) ; (a,a,b) ; (a,a,c) ; (a,a,d) ; (a,b,a) ; … ; (d,d,d)} où chaque code est un élément distinct de l'ensemble B. Dans ce cas B=A $\times$ A $\times$ A, et *card* (B) = *card* (A) $\times$ *card* (A) $\times$ *card* (A). L'antivol a 4^3=64 combinaisons. B est un ensemble produit.
- Mettons que notre antivol ait maintenant quatre codes, mais qu'il faille ordonner les quatre lettres sans jamais reprendre deux fois le même élément. L'ensemble de tous les codes devient C={ (a,b,c,d) ; (b,c,d,a) ; (c,d,a,b) ; (d,a,b,c) ; (b,a,c,d) ; …}. Il y a quatre chois pour placer le 'a' , trois choix pour le 'b' , deux pour le 'c' et il ne reste qu'une possibilité pour placer le dernier élément. *card* (C) = *card* (A) $\times$ (*card* (A)-1) $\times$ (*card* (A)-2) $\times$ (*card* (A)-3) = *card* (A) !=24. C est l'ensemble des bijections de {1,2,3,4} dans {a,b,c,d}. Une stratégie pour compter consiste à faire un arbre (fig. C).

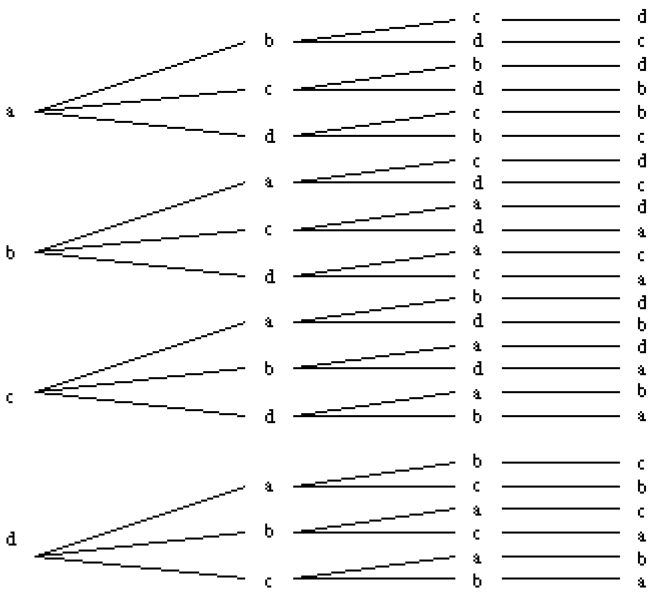


Figure C.

- Si maintenant, notre antivol n'a que trois codes, mais que ceux-ci bien qu'ordonnés, ne doivent pas être redondants. L'ensemble des codes se définit ainsi : Z={ (a,b,c) ; (b,c,d) ; (c,d,a) ; (d,a,b) ; (b,a,c) ; …}. Il y a 4 possibilités pour placer une lettre à la première place, 3 possibilités pour une lettre différente à la deuxième place et 2 possibilités pour une lettre différente à la troisième place. Nous obtenons :

  card (C) = *card* (A) $\times$ (*card* (A)-1) $\times$ (*card* (A)-2) = 4 $\times$ 3 $\times$ 2=24.

- Encore plus fort, les éléments d'un ensemble peuvent être des sous ensembles d'un autre ensemble! par exemple, D est l'ensemble de tous les tiercés dans le désordre des quatre partants de l'ensemble A. On note D={{a,b,c} ; {a,b,d} ; {a,c,d} ; {b,c,d}}. On admettra que *card* (D)= $\frac{n!}{(n-k)!k!}$ où n=*card*(A) et k est le nombre d'élément de chacun des sous-ensembles. On note aussi C_n^k.(voir fig. D)
- L'ensemble des parties de A, noté P(A) est un ensemble composé de tous les sous-ensembles de A ayant 0,1,2,3 ou 4 éléments. P(A) = { Æ ; {a} ; {b} ; {c} ; {d} ; {a,b} ; {a,c} ; {a,d} ; {b,c} ; {b,d} ; {c,d} ; {a,b,c} ; {a,b,d} ; {a,c,d} ; {b,c,d} ; {a,b,c,d} }. Le cardinal de cet ensemble est égal à :

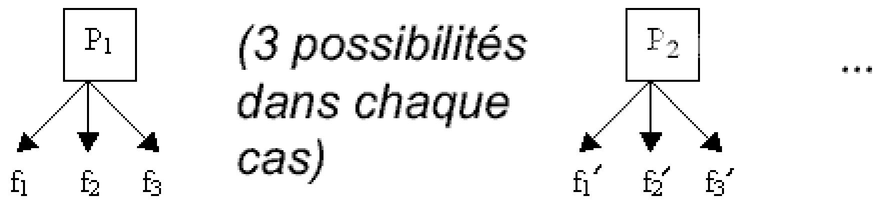
$$\textit{card}\,(\mathrm{P(A)}) = C_4^0+C_4^1+C_4^2+C_4^3+C_4^4$$

En identifiant avec le binôme de Newton, on obtient *card* (P(A))=2^4. De manière générale, si *card* (A) = n, alors *card* (P(A))=2^n.

QUELQUES EXEMPLES

EXEMPLE 1 :Une tribu de pygmées d'Afrique centrale décide de partir a la chasse pendant la saison sèche ,il y a 10 pères et chacun a trois fils en âge suivent leurs pères .Les pères désignes à la fin de la chasse celui qui a ramené le plus de gibier ,ce n'est qu'ensuite que le père élu désigne son fils le plus émérite .Une femme au village se demande combien il y a de choix possible pour qu'un fils et son père soient élu meilleur chasseur a leur retour .Peux-tu l'aider ?

SOLUTION : La première chose a faire et de formaliser ,il y a 10 pères notes {P1,P2,P3, P4,P5,P6, P7, P8, P9, P10} chaque père a 3 fils ,si on prend le premier père P1 ,soit c'est f1 ,soit f2 ,soit f3 qui tu le gibier ,pour le père P2 pareil ,même chose pour les autres pères .Donc en tout on a dix choix pour sélectionner un des pères sur les 10 ,et ensuite on a à chaque fois 3 choix pour les fils .Ce qui nous fait 3x10 choix au total .On aurait pu faire un arbre comme ça :



EXEMPLE 2 :Un riche sultan des émirats décide d'acheter une voiture a sa première épouse ,son conseillé lui propose le catalogue d'Opel sur lequel il y a cinq modèles en 18 teintes différentes et 36 couleurs de sièges possibles .Combien de choix s'offre au sultan ?

SOLUTION : Le Sultan a le choix entre 5 modèles {M1,M2,M3,M4,M5} ,s'il choisit par exemple le modèle 3 ,il a 18 choix pour les teintes {T1,T2,...,T18} ,s'il choisit la teinte T2 par exemple ,il lui reste 36 choix pour la couleur des sièges {S1,S2,...,S36} .En ayant fixé 2 paramètres ,il y a donc 36 choix .Maintenant , si on fixe qu'un seul paramètre (le modèle M5 par exemple) il y a 18x36=648 choix pour la couleur des sièges et les teintes .Maintenant comme il y a 5 modèles on a en tout 648x5=3240 voitures différentes .On aurait pu faire un arbre comme précédemment .

EXEMPLE 3 : Dans le Sultana d'Oman les plaques minéralogiques son composes de 7 caractères ,les trois premiers caractères sont des lettres et les 4 derniers des chiffres .Le sultan demande a son grand vizir : " dis moi donc grand vizir ,toi qui a appris l'analyse combinatoire avec Averoes quel est le nombres de plaques possible ? " .Sachant que le royaume compte 1 million et demi d'habitants est-ce que une lettre et cinq chiffres ne suffiraient pas ?

SOLUTION : Attention ici il faut bien voire que le Sultana d'Oman fait partie des Emirat Arabes unis .Imaginons que le Sultan soit immatriculé AAA0000 ,sa première fille 'Perle de coco' AAA0001 et ainsi de suite jusqu'à l'arrière petit fils du sultan qui est immatriculé AAA9999 ,on voit que toute la famille du sultan est immatriculé de 0000 a 9999 ce qui fait en tout 10000 personnes .Maintenant pour les lettres il y a 26 possibilités de AAA...AAG...AAZ (car il y 26 lettres dans l'alphabet) en changent seulement la dernière lettre .Donc on a 26 possibilités pour la première lettre ,26 pour la 2eme ,26 pour la 3eme ,soit 26x26x26=263=17576 choix pour les lettres c'est a dire l'ensemble {(A,A,A),(A,A,B),...,(A,A,Z),(A,B,A),(A,B,B),(A,B,C),...,(A,B,Z),(A,C,A),...(A,Z,Z),(B,A,A),...,(Z,Z,Z)} .Donc en tout on a 17576x10000 plaques d'immatriculation dans tout le pays .Soit ~ 175 millions .
Une plaque composée d'une lettre et de 5 chiffres fait de la même façon 26x100000=2,6 millions .

Exercices Corrgés de Dénombrement.

Quelques exercices

EXERCICE 1: Un p'tit gas qu'est amoureux d'une fille l'a déjà raccompagnée une fois chez elle ,comme il est chez lui ,qui sait pas quoi faire et qu'il arrête pas de penser a elle ,il décide de passer la voir mais comme y s'ouvient pas très bien il hésite entre 2 rues différentes et 3 numéros de porte pour chacune des rues .Ca fait combien de combinaisons ? Enfin il trouve mais il y a un digicode avec 10 chiffres (de 0 a 9 bien sur !) ,comme en général le code est a 4 chiffres différents, ça fait combien de combinaisons ?

EXERCICE 2: Combien y a t-il de numéros de téléphones de l'opérateur France Télécom avec les 4 indicatifs 01,02,03,04 ?

EXERCICE 3: A un conseil d'administration de la holding "Vivendi" (anciennement Général des eaux) on vote pour renouveler les dirigeants. En lice au poste de directeur ,il y a Jean-Marie Messier (directeur sortant) et un énarque venu faire du pantouflage ,au poste de sous-directeur il y a le choix entre 1 énarque et 6 polytechniciens ,enfin les actionnaires doivent élire un conseillé sur la douzaine qui se propose .Combien y a t il de staff possible avec un directeur ,un sous-directeur ,et un conseillé ? Sachant que Messier est sûr de remporter tous les suffrages ,combien de staff possible avec Messier comme dirlo ,un sous-dirlo et un conseillé ?

EXERCICE 4: Aux chiffres et aux lettres ,on a un tirage de 9 lettres distinctes (par exemple : NEUIPLMSA) .Combien de mots de 9 lettres le candidat peut-il faire ?(même si le mot n'est pas dans le dico) .

EXERCICE 5: Une vilaine gourmande entre dans une boulangerie avec l'intention d'acheter 3 tartes aux fruits. Les autres clients ont été plus rapides :il ne reste plus qu'une tarte aux fraises, une aux framboises ,une pommes ,une poires et une à la rhubarbe .Combien d'achats différents peut-elle effectuer ? (on pourra les énumérer) .

EXERCICE 6: Dans un nocturne à Vincennes ,dans la quatrième course ,il y a 13 partants ,Omar Sharif se demande s'il vaut mieux faire un tiercé sans tenir compte de l'ordre(3 chevaux sur 13) ou un quarté sans tenir compte de l'ordre (c'est à dire une sélection de 4 chevaux sur 13) .

EXERCICE 7: Sachant qu'au loto il y a 49 numéros et qu'il faut en cocher 6 par grille ,combien y a-t-il de grilles possibles ? (remarque :au loto l'ordre n'intervient pas) .

EXERCICE 8 : Dans un camp de naturistes comprenant 7 femmes et 5 hommes ,une partie de beach-volley s'organise .Combien d'équipes de 3 femmes et 1 homme peut-on former ?
Combien d'équipes de 3 femmes et 2 hommes ?

EXERCICE 9 : Un étudiant doit répondre à 7 des 10 questions d'un examen .
De combien de manières peut-il les choisir ?
Même question s'il est obligé de choisir au moins 3 des 5 premières questions ? (et 4 questions sur les 5 restantes) .

EXERCICE 10 : Le drapeau du Mali est composé de 3 bandes verticales de gauche à droite :vert ,jaune ,rouge .
Combien de drapeaux peut-on fabriquer à partir des couleurs du Mali ?
Le drapeau des jeux olympiques est constitué de 5 anneaux entrelacés dans l'ordre suivant :
bleu ,jaune ,noir ,vert ,rouge .De combien de façons différentes aurait-on pu les disposer ? (en changeant uniquement l'ordre des couleurs) .

La corréction :

EXERCICE 1: Bon ici il y a deux façon (au moins) de voire les choses ,la première est sûrement la plus simple et consiste a voire un numéro de tel. comme un nombre entier par exemple 43-61-37-66 peut être vu comme 43613766 ,il y en a en tout de 0 a 99999999 ,c'est a dire 100000000 ,100 millions .comme il y a 4 indicatifs ,ça 4x100000000 numéros de tel.
La deuxième façon de voire les choses et de dire qu'il il a 4 choix pour l'indicatif ,100 choix pour les 2 premiers chiffres (de 00 a 99),100 choix pour les 2 deuxièmes, 100 choix pour les 2 troisièmes ,et 100 choix pour les 2 derniers soit en tout 4x100x100x100x100=400000000.

EXERCICE 2: On peut faire des arbres comme pour tout les exos précèdent ,avec dirdo - sous-dirlo - conseillé. 7 choix pour le sous-dirlo,12 conseillés et 2 dirlo ce qui fait 2x12x7=168 staffs possibles ,si Messier est déjà fixé au poste de dirlo on a plus que 12x7 staffs possibles .

EXERCICE 3 : Comme on veut que les lettres soit distinctes (on ne peut pas avoir 2 lettres pareils) ,on a 26 choix pour la 1ere lettre ,25 choix pour la 2d ,24 pour la 3eme etc... 18 choix pour la 9eme lettre .Soit 26x25x24x23x22x21x20x19x18= 1133836704000 tirages .

EXERCICE 4 : Cet exercice et ceux qui suivent sont un peut diffèrent des précédents ,on va faire des Cnp ,mais il ne faut pas se focaliser sur la formule et plutôt sur le raisonnement OK ?Bon ici on a 5 tartes différentes T={T1,T2,T3,T4,T5} la fille en veut 3 sur les 5 ;En fait elle cherche des sous-ensembles a 3 éléments de l'ensemble de départ T : {T1,T2,T3} ou {T1,T2,T4} ou {T1,T2,T5} ou {T1,T3,T4} ou {T1,T3,T5} ou {T1,T4,T5} ou {T2,T3,T4} ou {T2,T3,T5} ou {T2,T4,T5} ou {T3,T4,T5} il y en a 10 en tout ce qui correspond a 10 sous-ensembles a 3 éléments d'un ensemble a 5 éléments .

EXERCICE 5 :Bon ,il y a 13 partants ,l'ensemble des chevaux est C={P1,P2,...,P13} ,un tiercé sans ordre est un ensemble quelconque de 3 chevaux tout comme les tartes précédemment .Un tiercé possible serait {P8,P10,p2} .De la même façon le quarté sans ordre est une sélection d'ensembles a 4 éléments choisit parmi l'ensemble C .Donc on a C_{13}^{3} =13 !/(13-3) !3 !=286 sous-ensembles le 3 éléments choisit parmi 13 :il y a 286 tiercés possibles .Pour les quartés la réponse est C413=715 .Donc intuitivement il y a plus se chance de toucher un tiercé que le quarté .

EXERCICE 6 : La encore nous nous trouvons a choisir des sous-ensembles a 6 éléments sur un ensemble a 49 éléments ,voici l'exemple d'une grille {3,5,7,8,9,41} ,le nombre totale de grille est simplement C_{49}^{6}=13983816~140 millions .