Combinatoire élémentaire: Dénombrement

Exercice 1

Le nombre d'applications d'un ensemble à *p* éléments dans un ensemble à *n* éléments est n^p.

a. Combien de mots de passe de 8 symboles peut-on créer avec 66 caractères ?
b. Si, dans un pays, les voitures ont des plaques avec deux lettres (leur alphabet a 26 caractères) et ensuite trois chiffres, combien de plaques possibles y a-t-il ?

Corrigé 1

a. 66^8= 360 040 606 269 696.   b. 26^2 10^3 = 676 000.

Exercice 2

Le nombre de permutations de *n* objets est *n*! = *n*· (*n*-1) ·...·2·1. Un professeur dispose de 32 livres sur un rayon de sa bibliothèque. 23 d'entre eux sont des livres de mathématiques et 9 de physique. Le professeur aimerait ranger ses livres de sorte que tous les livres traitant du même sujet restent groupés. Combien y a-t-il de dispositions possibles ?

Corrigé 2

Il y a 23! Permutations des livres de mathématiques et 9! Permutations des livres de physique. Ensuite il y a 2! Permutations des deux groupes. Le nombre de dispositions possibles est alors:

23! 9! 2! = 18 762 359 668 413 160 646 246 400 000 (i.e. 1,876.. $\cdot 10^{28}$)

Exercice 3

4 Américains, 3 Suisses et 5 Anglais doivent s'asseoir sur un même banc. Les gens de même nationalité doivent rester ensemble. Combien de dispositions peut-on imaginer?

Corrigé 3

Il y a 4! Permutations des 4 Américains, 3! Permutations des 3 Suisses et 5! Permutations des 5 Anglais. Ensuite il y a 3! Permutations des trois groupes. La réponse cherchée est:

4! 3! 5! 3! = 103680

Exercice 4

Le nombre de sous-ensembles de *k* objets choisis dans un ensemble à *n* éléments est : $C_n^k = \frac{n!}{(n-k)!k!}$ On veut former un comité comprenant 4 des 23 personnes d'un groupe. Combien y a-t-il de ces comités ?

Corrigé 4

C^4_{23}= 23!/ (4!·19!) = 8855.