Mathématiques http://matheleve.com	**DÉNOMBREMENT**	Classe :3ème ECO Prof : Mr. Chortani

Cardinal d'un ensemble fini

Vocabulaire

Le cardinal d'un ensemble fini E, noté Card(E), représente son nombre d'éléments.

Par exemple si E={1; 3; 5; 10} on a Card(E) = 11
Propriétés

Soient A et B deux parties d'un ensemble fini E. On a les relations suivantes :

*Card $(A \cup B)$ = Card(A) + Card(B) −Card $(A \cap B)$

*Dans le cas où A et B sont disjoints (c'est-à-dire $A \cap B = \varnothing$)

alors : Card $(A \cup B)$ = Card(A) + Card(B)

*Card ($\bar{A}$) = Card(E) − Card(A)

Produit cartésien d'ensemble finie

Définitions

*le produit cartésien de 2 ensembles E_1, et E_2noté $E_1 \times E_2$ représente l'ensemble des *couples* (e_1, e_2) où $e_1 \in E_1$et $e_2 \in E_2$.

Card $(E_1 \times E_2)$ = Card(E_1) × Card(E_2)

*Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et E un ensemble de cardinal n. Soit $p \in \mathbb{N}^*$.
un p-uplet d'éléments de E est un élément du produit cartésien $E^P = E \times ... \times E$ (p facteurs)

Remarque

Un élément du produit cartésien $E^2 = E \times E$ s'appelle un couple
Un élément du produit cartésien $E^3 = E \times E \times E$ s'appelle un triplet
Un élément du produit cartésien $E^4 = E \times E \times E \times E$ s'appelle un quadruplet

Théorème

Soit E un ensemble de cardinal fini n. Le cardinal de l'ensemble E^P est n^p.

Permutation, arrangement et combinaison

Dans tout ce qui suit,

*nous noterons $n!$ le produit $1 \times 2 \times 3 \times ... \times n$, ce produit s'appelle "factorielle n".
On ne convient que $0! = 1$.

**E* un ensemble fini non vide de cardinal n et p un entier naturel tel que $0 \leq p \leq n$.

Permutation

Définition

On appel permutation des n élément d'un ensemble E de cardinale n tout n-uplet d'éléments distinct de E

Le nombre de permutations

Le nombre de permutations des éléments de E est égal à n!

Arrangement

Définition

On appelle arrangement de p éléments d'un ensemble non vide E tout p-uplet d'éléments distincts de E

Le nombre d'arrangements

Le nombre d'arrangements de p éléments de E est :

$$A_n^p = n(n-1)\ldots..(n-p+1) = \frac{n!}{(n-p)!}$$

Et par convention, le nombre d'arrangement de 0 éléments d'un ensemble E est $A_n^0 = 1$

Combinaison

Définition

On appelle combinaison de p éléments d'un ensemble E tout partit à p éléments distincts de E

Le nombre de combinaisons

Le nombre de combinaisons de p éléments de E est :

$$C_n^p = \frac{A_n^p}{p!} = \frac{n!}{p! \times (n-p)!}$$

Principe de récurrence

Soit n_0 un entier naturel et P_n une propriété $(n \geq n_0)$
Si les conditions suivantes sont vérifiées :

* P_{n_0} est vrais,

*Si P_n est vraie alors P_{n+1} est vraie,

Alors pour tout $n \geq n_0$ P_n est vraie

Formule du binôme

Pour tout réels a et b et pour tout entier naturel non nul n

$(a+b)^n = C_n^0 b^n + C_n^1 a^1 b^{n-1} + C_n^2 a^2 b^{n-2} + \cdots + C_n^p a^p b^{n-p} + \cdots + C_n^n a^n$

Tringle de pascal

À la ligne *i* et à la colonne *j* $(0 \leq j \leq i)$ est placé le coefficient binomial C_i^j.

Il fut très tôt utilisé pour développer des expressions de la forme $(a+b)^n$

1											
1	1										
1	2	1									
1	3	3	1								
1	4	6	4	1							
1	5	10	10	5	1						
1	6	15	20	15	6	1					
1	7	21	35	35	21	7	1				
1	8	28	56	70	56	28	8	1			
1	9	36	84	126	126	84	36	9	1		
1	10	45	120	210	252	210	120	45	10	1	
1	11	55	165	330	462	462	330	165	55	11	1

Construction du tringle de Pascal

Le triangle de Pascal se construit de la manière suivante : placer 1 au sommet de la pyramide, puis 1 et 1 en dessous, de part et d'autre. Les extrémités des lignes sont toujours des 1

Pour les autres nombres, $C_i^j = C_{i-1}^j + C_{i-1}^{j-1}$

Blaise Pascal

Je suis un mathématicien, physicien, philosophe, moraliste et théologien français.

(19 juin 1623, Clermont (Auvergne) - 19 août 1662, Paris)