

## Exercice 1

I) Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R} \setminus \{2\}$  par  $f(x) = \frac{x^2 - 3x + 3}{x - 2}$  et on désigne par (C) sa courbe représentative dans un R.O.N  $(o, \vec{i}, \vec{j})$ .

1) Vérifier que  $f(x) = x - 2 + \frac{1}{x - 2}$  pour tout  $x \neq 2$ .

2) Déterminer les asymptotes à (C).

3) a) Justifier que  $f$  est dérivable sur  $\mathbb{R} \setminus \{2\}$  et que  $f'(x) = \frac{x^2 - 4x + 3}{(x - 2)^2}$  pour tout  $x \neq 2$ .

b) Dresser le tableau de variation de  $f$ .

4) a) Déterminer les points de (C) où les tangentes sont parallèles à la droite  $(\Delta): 8x - 9y + \alpha = 0$  ;  $\alpha \in \mathbb{R}$ .

b) Déterminer alors les valeurs possibles de  $\alpha$  pour que  $(\Delta)$  soit, elle-même, une tangente à (C).

II) Soit  $g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \leq 1 \\ \frac{\sqrt{x-1}}{x} + a & \text{si } x > 1 \end{cases}$  ;  $a \in \mathbb{R}$ . On désigne par (C') sa

courbe représentative dans un R.O.N  $(o, \vec{i}, \vec{j})$ .

1) Déterminer la valeur de  $a$  pour que  $f$  soit continue en 1.

Dans la suite, on prendra  $a = -1$ .

2) Étudier la dérivabilité de  $g$  à droite de 1. Interpréter graphiquement le résultat.

3)  $g$  est-elle dérivable en 1? Justifier.

4) Calculer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$ . Interpréter graphiquement le résultat.

5) Montrer que  $g$  est dérivable sur  $]1, +\infty[$  et  $g'(x) = \frac{2-x}{2x^2 \sqrt{x-1}}$  pour  $x > 1$ .

6) Dresser le tableau de variation de  $g$ .

## Exercice 2

Soit  $x$  un réel. On pose  $A(x) = \cos(x) + \sin(x) - 1$  et  $B(x) = 4\cos^2(x) - 1$

1) Montrer que, pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , on a :  $B(x) = 1 + \cos(2x)$ .

2) a) Vérifier que  $A(x) = \sqrt{2} \left[ \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \right] - 1$ .

b) Résoudre dans  $\mathbb{R}$  l'équation  $A(x) = 0$ .

3) On pose  $f(x) = \frac{1 + \cos(2x)}{A(x)(2\cos(x) + 1)}$ .

a) Déterminer le domaine de définition  $D_f$  de  $f$ .

b) Simplifier  $f(x)$  puis résoudre l'inéquation  $f(x) \geq 0$

### Exercice 3

Soit  $x \in \mathbb{R}$ , on pose:  $f(x) = 2 + \cos(2x) + \sqrt{3} \sin(2x)$  et  $g(x) = \sqrt{3} \cos(2x) \sin(2x)$ .

1) Montrer que  $f(x) = 4 \cos^2(x - \frac{\pi}{6})$  pour tout  $x \in \mathbb{R}$ .

2) a) Montrer que  $g(x) = 2 \cos(2x - \frac{5\pi}{6})$  pour tout  $x \in \mathbb{R}$ .

b) Résoudre dans  $]-\pi, \pi]$ , puis dans  $\mathbb{R}$ , l'équation  $g(x) = 0$ .

3) a) Vérifier que  $g(x) = 4 \sin(x - \frac{\pi}{6}) \cos(x - \frac{\pi}{6})$ .

b) On pose  $h(x) = \frac{g(x)}{f(x)}$