Lycée : Habib Thamer Classe : 3 ème Math et Science	SERIE D' EXERCICES N°(14) Etude de fonctions	Prof : Regaig Farhat A.scolaire : 2008/2009

Exercice 1 :

On considère la fonction f définie par $f(x) = \sqrt{(x-2)^2-1}$

On note (ζ) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$

1) a) Montrer que f est définie sur I $=]-\infty, 1] \cup [3, +\infty[$

   b) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

   c) Etudier la dérivabilité de f à gauche en 1 et à droite en 3. Interpréter graphiquement les résultats.

2) a) Montrer que pour tout $x \in]-\infty, 1[\cup]3, +\infty[$, on a $f'(x) = \dfrac{x-2}{\sqrt{(x-2)^2-1}}$

   b) Dresser le tableau de variation de f.

3) Montrer que la droite Δ_1 d'équation $y = x-2$ est une asymptote à (ζ) au voisinage de $+\infty$ et que la droite Δ_2 d'équation
   $y = -x+2$ est une asymptote à (ζ) au voisinage de $-\infty$.

4) Tracer Δ_1 ; Δ_2 et (ζ)

5) Soit g la fonction définie par $g(x) = \sqrt{x^2-4|x|+3}$

   a) Déterminer l'ensemble de définition J de la fonction g.

   b) Montrer que g est une fonction paire.

   c) Tracer la courbe représentative (ζ ') de la fonction g.

Exercice 2 :

1) Soit la fonction g définie sur IR par $g(x) = \dfrac{2x}{\sqrt{x^2+3}} - 1$

   1) Montrer que g est dérivable sur IR et que $g'(x) = \dfrac{6}{(3+x^2)\sqrt{3+x^2}}$

   2) Etablir le tableau de variation de g.

   3) Calculer g(1).. En déduire une étude de signe de g(x) sur IR.

2) Soit la fonction f définie sur IR par $f(x) = 2\sqrt{3+x^2} - x$

   a) Dresser le tableau de variation de f.

   b) Donner une équation cartésienne de la tangente T à la courbe de f en son point d'abscisse (1).

Exercice 3 :

Soit f la fonction numérique de la variable réelle x définie par : $x \mapsto x+2+\dfrac{1}{x+3}$

1) Etudier les variations de la fonction f et tracer sa représentation graphique (C) dans un plan affine muni d'un repère $(O,\vec{i},\vec{j})$. (On montrera que la droite (D) d'équation y = x + 2 est asymptote à (C)).

2) Déterminer une équation cartésienne de la tangente à (C) au point de (C) d'abscisse – 1 et représenter (D).

3) Résoudre graphiquement dans IR, l'inéquation $x+2+\dfrac{1}{x+3} < 0$

En déduire la représentation graphique de la fonction numérique g de la variable réelle x définie par : $x \mapsto \left|\dfrac{x^2+5x+7}{x+7}\right|$

Exercice 4 :

1) Soit la fonction g définie sur IR par $g(x) = \dfrac{2x}{\sqrt{x^2+3}} - 1$

   a) Montrer que g est dérivable sur IR et que $g'(x) = \dfrac{6}{(3+x^2)\sqrt{3+x^2}}$

   b) Etablir le tableau de variation de g.

   c) Calculer g(1).. En déduire une étude de signe de g(x) sur IR.

2) Soit la fonction f définie sur IR par $f(x) = 2\sqrt{3+x^2} - x$

   a) Dresser le tableau de variation de f.

   b) Donner une équation cartésienne de la tangente T à la courbe de f en son point d'abscisse (-1).

   c) Tracer la courbe représentative (ζ) de la fonction f .

Exercice 5 :

On considère la fonction f définie sur IR \ {2} par $f(x) = |x + 1| + \frac{1}{x-1}$

1) Montrer que f est continue en tout point de son ensemble de définition.
2) Pour tout $h \in IR^*$ calculer $\zeta(h) = \frac{f(-1+h)-f(-1)}{h}$ utiliser ce calcul pour étudier la dérivabilité de f en $x_0 = -1$
3) Préciser l'ensemble de dérivabilité D de f et définir la fonction dérive f' de f.
4) Dresser le tableau de variation de la fonction f.
5) On considère par (ζ) la représentation graphique de f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$
   a) Montrer que les droite (D_1) et (D_2) d'équations respectives $y = x + 1$et $y = -x - 1$sont des asymptotes à la courbe (C_f).
   b) Ecrire une équation cartésienne de chacune des demi tangentes à (C_f) en son point M_0 d'abscisse $x_0 = -1$ et les représenter dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
   c) Tracer la courbe (ζ) dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$. (figure 2)

Exercice 6 :

Soit f la fonction numérique de la variable réelle x définie par : $x \mapsto \frac{2x^2-4x+2}{2x+3}$

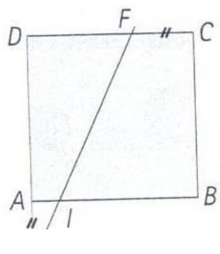
On désigne par (C) la représentation graphique de f dans un plan affine muni d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$

1) Montrer que pour tout $x \in IR \setminus \left\{-\frac{3}{2}\right\}$ on a : $\frac{2x^2-4x+2}{2x+3} = ax + b + \frac{c}{2x+3}$ où a, b et c sont trois nombres réels que l'on déterminera.
2) Montrer que (C) admet deux asymptotes, la droite (D) d'équation $y = ax + b$ et une droite (D') dont on donnera l'équation.
3) Soit I le point d'intersection de (D) et (D'). montrer que I est un centre de symétrie pour (C).
4) Etudier et représenter graphiquement les variations de f (on étudiera la position de (C) par rapport à l'asymptote (D)).
5) m étant un paramètre réel, utiliser (C) pour étudier l'existence des racines de l'équation suivante dans IR : $2x^2 - 2(m + 2)x - 3m + 2 = 0$
6) Ecrire une équation cartésienne de la tangente (T) à (C) en son point A d'abscisse $-\frac{3}{2}$?
7) On considère une droite (D_t) de coefficient directeur t, $t \in IR$, passant par le point K de coordonnées $\left(\frac{-3}{2};\frac{-20}{9}\right)$. Etudier suivant les valeurs de t, le nombre de points communs à (C) et (D_t).

Exercice 7 :

ABCD est un carré de côté 1.Les points E et F appartiennent à la demi-droite [Ax) et au segment [DC] et vérifient AE = CF.

I est le point d'intersection des droites (AB) et (EF). On pose AE = x.



1) a) Démontrer que : $AI = \frac{x-x^2}{x+1}$

   b) Déterminer la position du point E pour que la distance AI soit maximale.
2) Quelle est la position du point E qui rend l'aire du triangle AIE maximale?

Exercice 8 :

On considère un triangle ABC rectangle en A tel que AB = 1.

On désigne par x la distance AC ($x \in]0 ; +\infty[$).

Soit H le projeté orthogonal de A sur la droite (BC).

1) Exprimer l'aire du triangle ABH en fonction du réel positif x.
2) On notera f(x) cette aire. Etudier les variations de la fonction f. en déduire la valeur du réel x telle que l'aire du triangle ABH est maximale.