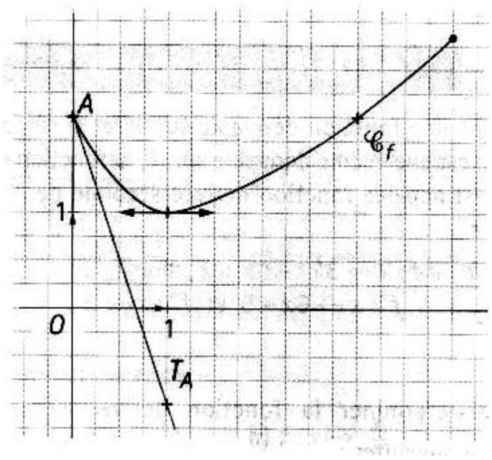
| Lycée : Habib Thamer<br>Classe :3 ème Math et Science | SERIE D' EXERCICES N°(12)<br>Fonction dérivée | Prof : Regaig Farhat<br>A.scolaire : 2008/2009 |
|---|---|---|

## Exercice 1 :




La courbe ($\zeta_f$) représente une fonction f définie et dérivable sur [0 ; 4] dans un repère orthonormé. On note f ' la fonction dérivée de f. La droite ($T_A$) est la tangente au point A d'abscisse 0. La courbe admet une tangente parallèle à l'axe des abscisses au point d'abscisse 1.

1) a) Donner f (0), f (1), f ' (0) et f ' (1).
 b) Donner le tableau des variations de f.

2) On considère la fonction g inverse de f, c'est-à-dire g = $\frac{1}{f}$ . On note g' la fonction dérivée de g.
 a) Déterminer g (0), g (1) et g (3).
 b) Déterminer les valeurs g' (0) et g' (1).
 c) Déterminer le sens de variation de g. justifier.
 d) Construire sur le graphique la courbe représentative de g.

## Ex.ercice 2:

Soit f(x) = $\sqrt{x^2-2x-3}$ . On désigne par $\zeta$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1) a) Déterminer $D_f$ et étudier la continuité de f sur $D_f$.
 b) Etudier la dérivabilité de f à gauche en (-1) et à droite en 3. Interpréter graphiquement les résultats.

2) a) Montrer que : $\forall$ x $\in$ $D_f$ \ {-1 ; 3}, on a f '(x) = $\frac{x-1}{\sqrt{x^2-2x-3}}$
 b) Dresser le tableau de variation de f.

3) a) Vérifier que : $\forall$ x $\in$ $D_f$ ; f(x) = $\sqrt{(x-1)^2-4}$
 b) Montrer que : $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[f(x)+x-1\right]=0$ et que $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-x+1\right]=0$
 c) En déduire que la courbe $\zeta$ admet deux asymptotes obliques D et D'.

4) Tracer D, D' et $\zeta$.

## Ex.ercice 3 :

Soit f la fonction définie par f(x) = 1 – $\sqrt{x^2+x}$ et $\zeta_f$. sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$ du plan.

1) a) Déterminer l'ensemble de définition de f
 b) Etudier la dérivabilité de f à droite en 0 et à gauche en -1. Interpréter graphiquement le résultat obtenu.
 c) Déterminer f '(x) pour tout x $\in$ $D_f$
 d) Dresser le tableau de variation de f.

2) a) Montrer que la droite D : y = $-x+\frac{1}{2}$ est asymptote à $\zeta_f$. en (+ ∞)et que la droite D' : y = $x+\frac{3}{2}$ est asymptote à $\zeta_f$. en ( –∞)
 b) Etudier la position de $\zeta_f$. par rapport à D et par rapport à D'.
 c) Déterminer l'équation de l'asymptote D'à $\zeta_f$. au voisinage de –∞.

3) Tracer D, D' et $\zeta_f$. .

4) Déduire de $\zeta_f$. la courbe représentative $\zeta_g$ de la fonction g(x) = $1-\sqrt{x^2+|x|}$ et construire $\zeta$g dans le repère

## Exercice 4 :

Soit g la fonction définie sur IR par g(x) = 1 + $\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$

a) Vérifier que pour tout réel x on a : g ’(x) = $\dfrac{1}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$

b) Etudier les variations de g et en déduire que pour tout réel x : g(x) > 0.

1) Soit f la fonction définie sur IR par f(x) = x – 1 + $\sqrt{x^2+1}$ et ζ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

a) Vérifier que pour tout réel x on a : f ’(x) = g(x)

b) Montrer que $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -1$. Interpréter graphiquement le résultat obtenu.

c) Dresser le tableau de variation de f.

2) a) Montrer que la droite Δ : y = 2x – 1 est une asymptote à ζ au voisinage de +∞.

b) Ecrire une équation de la tangente T par rapport à ζ.

c) Tracer, T et Δ dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$ (on placera les points de ζ d’abscisses -1 et 1).

## Exercice 5 :

I/ Soit f la fonction définie par f (x) = $\dfrac{-x+2}{x^2-4x+5}$

1) Dresser le tableau de variation de f.

2) Soit (ζ) la courbe représentative de f dans R.O.N ( $o,\vec{i},\vec{j}$ ). Ecrire une équation de la tangente Δ à (ζ) au point d’abscisse 2.

3) Etudier la position de (ζ) et Δ

II/ On considère la fonction g définie par $\begin{cases} g(x)=\dfrac{-x+2}{x^2-4x+5} & si\ x \le 4 \\ g(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x}}-\dfrac{9}{10} & si\ x > 4 \end{cases}$

1) Etudier la continuité et la dérivabilité de g en 4
2) Déterminer le domaine de dérivabilité de g et déterminer g’(x)
3) Etudier les variations de g et préciser ses extrêma

## Exercice 6 :

I- Soit la fonction f : IR → IR ; x ↦ ax + b + $\dfrac{4}{x-1}$ ; où a et b sont des réels.

On désigne par (C) sa courbe représentative dans la plan rapporté à un repère orthonormé $(o,\vec{i},\vec{j})$.

1) a) Justifier que f est dérivable en tout point de IR \ {1} et calculer f’(x) pour tout x ∈ IR \ {1}

b) Déterminer a et b pour que (C) admette en son point d’abscisse 2 pour tangente la droite Δ : y = – 3x + 15.

2) On donne a = 1 et b = 3

a) Déterminer les points de (C) où la tangente est parallèle à l’axe $(o,\vec{i})$

b) Déterminer une équation cartésienne de la tangente à (C) passant par le point A (1, -4)

c) Dresser le tableau de variation de f .

d) Construire (C)

II- Soit g la fonction définie par : $\begin{cases} g(x) = x+3+\dfrac{4}{x-1} & si\ x \in \left]-\infty,0\right] \\ g(x) = x-1+\sqrt{x^2+2x} & si\ x \in \left]0,+\infty\right[ \end{cases}$

1) Etudier la dérivabilité de g en zéro. Interpréter graphiquement les résultats obtenus.
2) Montrer que la droite D : y = $2x$ est asymptote à $\zeta_g$. en + ∞
3) Dresser le tableau de variation de g.
4) Construire ($C_g$)

## Exercice 2 :

On considère la fonction f définie sur IR \ {2} par f(x) = |x + 1| + $\frac{1}{x-1}$

1) Montrer que f est continue en tout point de son ensemble de définition.
2) Pour tout h ∈ IR* calculer ζ (h) = $\frac{f(-1+h)-f(-1)}{h}$ utiliser ce calcul pour étudier la dérivabilité de f en $x_0 = -1$
3) Préciser l'ensemble de dérivabilité D de f et définir la fonction dérive f' de f.
4) Dresser le tableau de variation de la fonction f.
5) On considère par ( ζ ) la représentation graphique de f dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$
   a) Montrer que les droite ($D_1$) et ($D_2$) d'équations respectives y = x + 1et y = – x – 1sont des asymptotes à la courbe ($C_f$).
   b) Ecrire une équation cartésienne de chacune des demi tangentes à ($C_f$) en son point $M_0$ d'abscisse $x_0 = -1$ et les représenter dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$.
   c) Tracer la courbe ( ζ ) dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$.

### Exercice 4 :

Soit f la fonction numérique de la variable réelle x définie par : $x \mapsto \frac{2x^2-4x+2}{2x+3}$

On désigne par ( C ) la représentation graphique de f dans un plan affine muni d'un repère $(O,\vec{i},\vec{j})$

1) Montrer que pour tout x ∈ IR \ $\left\{-\frac{3}{2}\right\}$ on a : $\frac{2x^2-4x+2}{2x+3} = ax+b+\frac{c}{2x+3}$ où a, b et c sont trois nombres réels que l'on déterminera.
2) Montrer que ( C ) admet deux asymptotes, la droite (D) d'équation y = ax + b et une droite (D') dont on donnera l'équation.
3) Soit I le point d'intersection de (D) et (D'). montrer que I est un centre de symétrie pour ( C ).
4) Etudier et représenter graphiquement les variations de f (on étudiera la position de ( C ) par rapport à l'asymptote (D) ).
5) Ecrire une équation cartésienne de la tangente (T) à ( C ) en son point A d'abscisse $-\frac{3}{2}$ ?

***Exercice 5 :***

Soit f la fonction numérique de la variable réelle x définie par : $x \mapsto x+2+\dfrac{1}{x+3}$

1) Etudier les variations de la fonction f et tracer sa représentation graphique ( C ) dans un plan muni d'un repère $(O,\vec{i},\vec{j})$. (On montrera que la droite (D) d'équation y = x + 2 est asymptote à (C)).
2) Déterminer une équation cartésienne de la tangente à ( C ) au point de ( C ) d'abscisse $-1$ et représenter (D).
3) Résoudre graphiquement dans IR, l'inéquation $x+2+\dfrac{1}{x+3}<0$. En déduire la représentation graphique de la fonction g: $x \mapsto \left|\dfrac{x^2+5x+7}{x+7}\right|$

Soit f la fonction définie par : $\begin{cases} f(x) = \dfrac{x^3-1}{x^2-3x+2} & \text{si } x \in ]-\infty, 1[ \\ f(x) = \sqrt{x^2-1} - 3x & \text{si } x \in [1, +\infty[ \end{cases}$

1) a) Montrer que f est continue en 1.
   b) Etudier la dérivabilité de f en 1.
2) Prouver que f est dérivable sur]-∞, 1[ et calculer f'(x) pour $x \in ]-\infty, 1[$
3) On désigne par (C) la courbe représentative de la restriction de f à]-∞, 1[.Soient A et B les points de (C) d'abscisse respectives -1 et 0. Montrer qu'il existe une tangente à (C) parallèle à la droite (AB).

## Exercice 2:

Soit f la fonction définie par : $\begin{cases} f(x) = \dfrac{x^3+|x+1|}{|x+1|+1} & \text{si } x \in ]-\infty, 0] \\ f(x) = \dfrac{x^3-x^2}{\sqrt{x}} & \text{si } x \in ]0, +\infty[ \end{cases}$

1) Etudier la continuité de f en 0.
2) Etudier la dérivabilité de f en 0 et en (-1)
3) Montrer que f est dérivable sur chacun des intervalles]-∞, 1[ ;]-1, 0[et] 0, + ∞[ et calculer f'(x) pour tout $x \in IR^* \setminus \{-1\}$
4) Calculer les limites éventuelles suivantes : $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{(x^2-x)\sqrt{x}-2\sqrt{2}}{x-2}$ et $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{2f(x) - x f(2)}{x-2}$
5) On désigne par (C) la courbe de la restriction de f à]-∞, -1[dans un repère du plan. Y a-t-il un point de (C) où la tangente est la droite Δ dont une équation est : 10 x + 9 y – 3 = 0 ?

## Exercice 3

I- Soit la fonction f : $IR \to IR$ ; $x \mapsto ax + b + \dfrac{4}{x-1}$ ; où a et b sont des réels.

On désigne par (C) sa courbe représentative dans la plan rapporté à un repère orthonormé $(o, \vec{i}, \vec{j})$.

1) a) Justifier que f est dérivable en tout point de IR \ {1} et calculer f'(x) pour tout $x \in IR \setminus \{1\}$
   b) Déterminer a et b pour que (C) admette en son point d'abscisse 2 pour tangente la droite Δ : y = – 3x + 15.
2) On donne a = 1 et b = 3
   a) Déterminer les points de (C) où la tangente est parallèle à l'axe $(o, \vec{i})$
   b) Soit D une droite de coefficient directeur m ; où m est un réel. Montrer que si D est tangente à (C) alors $m \in ]-\infty, 1[$
   c) Déterminer une équation cartésienne de la tangente à (C) passant par le point A(1, -4)

II- Soit g la fonction définie par : $\begin{cases} g(x) = x + 3 + \dfrac{4}{x-1} & \text{si } x \in ]-\infty, 0] \\ g(x) = x - 1 + \sqrt{x^2+2x} & \text{si } x \in ]0, +\infty[ \end{cases}$

1) Montrer que g est continue en tout point de son ensemble de définition.
2) Etudier la dérivabilité de g en zéro. Interpréter graphiquement

## Exercice N°4:

Soit la fonction f définie par : $\begin{cases} f(x) = \dfrac{x^2-x+4}{x-2} & \text{si } x < 1 \\ f(x) = x^2+2x-7 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$

1) Etudier la dérivabilité de f en 1. interpréter graphiquement le résultat trouvé.
2) Montrer que f est dérivable sur]- ∞,1 [et sur]1, + ∞ [et déterminer sa fonction dérivée.
3) Existe-t-il des points de Cf ou la tangente est parallèle à la droite D : x – 3y + 6 = 0

4) Soit $g : x \mapsto \dfrac{a x^2 + b x + 2}{x - 1}$

a. Calculer $g'(x)$ pour $x \in IR \setminus \{1\}$

b. Déterminer a et b pour que g admette un extremum en 2 égal à $-6$

c. On prend : $a = -1$ et $b = -2$. Dresser le tableau de variation de g.

Existe-t-il une tangente à Cg passant par l'origine du repère.