EXERCICE N° 1

Soit la fonction f définie sur IR par : $f(x) = \frac{2x}{x^2+1}$

1/ a- Montrer que pour tout réel x, on a : $2|x| \leq x^2 + 1$.
b- En déduire que f est bornée sur IR.
c- Déterminer les extremums de f.

2/ Soient a et b deux réels de $[1,+\infty[$.
a- Montrer que : $f(a)-f(b) = \frac{2(a-b)(1-ab)}{(a^2+1)(b^2+1)}$.
b- En déduire les variations de f sur $[1\ ,+\infty[$.

EXERCICE N°2

Soit f une fonction définie sur IR, tel que $\forall\ x \in IR : f(-x) + 3f(x) = 4x^3 + 2x$.

1/ Montrer que pour tout réel x f est impaire.
2/ En déduire l'expression de la fonction f.
3/ Etudier alors la monotonie de f sur IR.
4/ Soit la fonction $g(x) = \frac{1}{\sqrt{f(x)}}$.
Préciser le domaine de définition de g et étudier sa monotonie.

EXERCICE N°3

I/ Déterminer le domaine de définition de chacune des fonctions suivantes :

$f_1(x) = \frac{x\sqrt{x+1}}{-2x^2+3x-1}$ $f_2(x) = \frac{\sqrt{2}x - |x|}{2x^2+x+3}$ $f_3(x) = \frac{\sqrt{5}x^4 - \pi}{|x^2-1|+3}$

$f_4(x) = \sqrt{-2x^2+5x-3}$ $f_5(x) = \frac{3\sqrt{x-3}}{x^2-9}$ $f_6(x) = \frac{-5x^2+5}{x+1-\sqrt{2x+5}}$

II/ Soit la fonction f définie sur IR par $f(x) = -(2x+4)^2 + 3$.
1/ Montrer que f est majorée sur IR.
2/ Montrer que f est bornée sur [-2,4].
3/ Etudier les variations de f pour $x \geq -2$ puis pour $x \leq -2$.
4/ Déduire que f admet un extremum sur IR.

III/ Soit la fonction f définie par $f(x) = \frac{x+1}{x^2+2x+2}$
1/ Déterminer le domaine de définition de f.
2/ Montrer que $\forall\ x \in IR$, $-1/2 \leq f(x) \leq 1/2$.
3/ Déduire que f admet deux extremums.

IV/ Montrer que la fonction $f(x) = x(1 - x)$ est majorée par 1/4, en déduire le maximum de f.