

Exercice 1:

Pour chacune des 6 affirmations ci-dessous, préciser si elle est vraie ou fausse et donner une justification.

- 1) Les anagrammes du mot MATHEMATIQUES sont au nombre de $\frac{13!}{2! 2! 2!}$
- 2) Le coefficient du monôme de degré 4 du polynôme P défini par $P(x) = (2+x)^5$ est 10
- 3) On place dans une urne cinq boules indiscernables au toucher, deux rouges et trois vertes.
On tire simultanément 2 boules de l'urne. La probabilité d'obtenir 2 boules de même couleur est $\frac{6}{25}$
- 4) Une urne contient 3 boules blanches, 4 boules noires et 1 boule rouge. On tire successivement avec remise trois boules de l'urne. La probabilité d'obtenir 3 boules noires est : $\frac{C_4^3}{C_8^3}$
- 5) Si on procède à cinq lancers successifs indépendants d'un dé cubique équilibré, la probabilité d'obtenir des résultats tous pairs est de $\frac{1}{2}$
- 6) On donne deux événements A et B tel que $P(A \cap \bar{B}) = 0,3$ et $P(A \cap B) = 0,25$. Alors $P(A) = 0,55$.

Exercice 2:

Suite à une enquête statistique, on peut affirmer que dans la population étudiée : 40 % des individus aiment la musique, 60 % aiment le cinéma, et 15 % aiment à la fois la musique et le cinéma.

On interroge au hasard un individu de la population étudiée (on assimilera fréquence et probabilité). Quelle est la probabilité que cet individu :

- 1) aime la musique, mais pas le cinéma ?
- 2) aime le cinéma, mais pas la musique ?
- 3) n'aime ni le cinéma ni la musique ?

Exercice 3:

La loi de probabilité ci-dessous décrit le lancer d'un dé truqué, dont les faces sont numérotées de 1 à 6.

x_i	1	2	3	4	5	6
p_i	0,1	0,15	0,2	0,4	0,1	0,05

Déterminer la probabilité de chacun des événements :

- 1) A: « le résultat est pair »
- 2) B: « le résultat est au plus égal à 3 »
- 3) C: « le résultat est un nombre premier »
- 4) D = $A \cup B$; E = $B \cap C$; F = \bar{A}

Exercice 4:

A et B sont deux événements tels que : $p(A) = 0,45$, $p(B) = 0,6$ et $p(A \cup B) = 0,8$.

Calculer $p(A \cap B)$.

En conservant les valeurs de $p(A)$ et $p(B)$, est-il possible d'avoir : $p(A \cup B) = 0,5$?

Exercice 5:

On lance deux des tétraédriques équilibrés dont les faces sont numérotées de 1 à 4.

On note le résultat du lancer réalisé par un couple dans l'ordre croissant des numéros obtenus.

- 1) A l'aide d'un arbre, déterminer la loi de probabilité expérience aléatoire.
- 2) Calculer la probabilité de chacun des événements suivants

A: « les deux nombres sont identiques »

B: « les deux nombres sont consécutifs »

C: « les deux nombres sont distincts et de même parité »

D: « les deux nombres sont premiers »

E: « la somme des deux nombres est un nombre premier »

Exercice 6:

Une entreprise fabrique des « puces » électronique qui peuvent présenter deux défauts de fabrication. Une étude statistique a montré que :

- 20 % des pièces présentent le défaut A (au moins)
- 24 % des pièces présentent le défaut B (au moins)
- 15 % des pièces présentent les deux défauts.

Calculer la probabilité des événements suivants :

- 1) E : « la puce a au moins l'un des deux défauts »
- 2) F: « la puce a un défaut et un seul »
- 3) G: « la puce a le défaut A seulement »
- 4) H : la puce a le défaut B seulement »
- 5) L : « la puce n'a aucun des deux défauts »

Exercice 7:

On dispose de deux des cubiques bien équilibrés, un rouge et un bleu, dont les faces sont numérotées de 3 à 6.

On lance une fois simultanément les deux dés.

- 1) Calculer la probabilité de chacun des événements suivants :

A: « les deux numéros obtenus sont identiques »

B: « le numéro du dé bleu est strictement supérieur à celui du rouge ».

C: « le numéro du dé rouge est strictement supérieur à celui bleu ».

- 2) Calculer $p(A) + p(B) + p(C)$, puis interpréter ce résultat.

Exercice 8 :

Une urne contient :
• 4 boules blanches : B_1, B_2, B_3 et B_4 .
• 3 boules rouges : R_1, R_2 et R_3 .
• 2 boules noires : N_1 et N_2 .

Ces boules numérotées sont indiscernables au toucher. On tire au hasard une boule de l'urne.

- Décrire l'univers de cette expérience et préciser son cardinal.
- On considère les événements: A : « tirer une boule blanche », B : « tirer une boule portant le numéro "1" », C : « tirer une boule dont le numéro est supérieur ou égal à "3" ».

Décrire les événements : a) $(A \text{ et } B)$; b) $(A \text{ ou } B)$; c) \bar{C} ; d) $(A \text{ ou } \bar{C})$; e) $(\bar{A} \text{ et } C)$; f) $(\bar{B} \text{ et } C)$

- Justifier que cette expérience vérifie l'hypothèse d'équiprobabilité, puis calculer la probabilité des événements:
a) $(A \text{ et } C)$; b) $(\bar{A} \text{ et } \bar{B})$; c) $(C \text{ et } B)$

Exercice 9 :

Sur une grille 8 x 8, le joueur dispose de la manière suivante cinq bateaux dont deux croiseurs occupant chacun deux cases et trois torpilleurs occupant chacun une case.

Pour son premier tir, l'adversaire choisit une case au hasard (exemple: H-8).

- Décrire l'univers de cette expérience et préciser son cardinal.
- Justifier l'hypothèse d'équiprobabilité, puis calculer la probabilité des événements :
 A : « l'adversaire touche un bateau »; T : « l'adversaire touche un torpilleur »;
 C : « l'adversaire touche un croiseur ».

- L'adversaire décide de jouer son premier coup sur une case située au bord de la grille. Quelle est alors la probabilité qu'il touche un bateau?
- Même question si l'adversaire décide de jouer son premier coup dans un des « coins » de la grille.

	1	2	3	4	5	6	7	8
A		■						
B		■						
C						■		
D								
E				■	■			
F								■
G								
H	■							

Exercice 10 :

Un sac contient 7 jetons, indiscernables au toucher, numérotés de 1 à 7. Les jetons 1 à 4 sont blancs et les jetons 5 à 7 sont noirs. On tire au hasard un jeton de ce sac.

- Décrire l'univers de cette expérience et préciser son cardinal.
- On considère les événements :
 B : « le jeton tiré est blanc »;
 N : « le jeton tiré est noir »;
 D : « le jeton tiré porte un numéro multiple de deux »;
 T : « le jeton tiré porte un numéro multiple de trois ».

Décrire les événements : a) $(B \text{ et } D)$ b) $(D \text{ ou } T)$ c) $(N \text{ et } \bar{D})$ d) $(\overline{B \text{ ou } D})$

- Calculer la probabilité des événements: a) $(B \text{ ou } N)$ b) $(\overline{N \text{ ou } D})$ c) $(\bar{B} \text{ ou } \bar{D})$

Exercice 11 :

On lance un dé bien équilibré deux fois de suite.

- Décrire à l'aide d'un arbre l'univers Ω . des réalisations possibles, puis donner le cardinal de Ω .
- On considère les événements :
 A : « les deux lancers ont donné le même numéro »;
 B : « la somme de deux numéros obtenus est égale à 4 »;
 C : « le résultat du premier lancer est strictement supérieur au résultat du second ».

Justifier l'équiprobabilité de cette expérience, puis calculer la probabilité des événements A, B et C.

Exercice 12 :

On a réparti les élèves de classes d'un lycée en 3 catégories : niveau insuffisant (I) ; niveau moyen (M) et niveau satisfaisant (S).

- On choisit au hasard un élève de l'une de ces deux classes.
a) Calculer la probabilité que ce soit un élève de niveau satisfaisant.
b) Calculer la probabilité que ce soit un élève de niveau satisfaisant et appartenant à la classe 1.
- On choisit au hasard un élève de niveau satisfaisant. Calculer la probabilité qu'il provienne de la classe
- On choisit au hasard un élève de la classe 1. Calculer la probabilité qu'il soit de niveau satisfaisant.

	I	M	S	Total
Classe 1	4	12	4	10
Classe 2	11	14	10	35
total	15	26	14	55

Exercice 13 :

Une pièce est fabriquée dans une usine par l'une des trois machines M_1, M_2 ou M_3 . Selon leur vétusté, ces trois machines produisent un

Certain nombre de pièces défectueuses : la machine M_1 en produit 1 %, la machine M_2 en produit 2 %, la machine M_3 en produit 5 %.

- Compléter le tableau ci-dessous en indiquant le nombre de pièces défectueuses (D) et non défectueuses (ND) fabriquées par chaque machine.
- On choisit une pièce au hasard. Quelle est la probabilité qu'elle soit défectueuse?
- On choisit au hasard une pièce défectueuse. Quelle est la probabilité qu'elle ait été fabriquée par la machine M_1 ?

	D	MD	Total
M_1			700
M_2			200
M_3			100
Total			1000

Exercice 14 :

On tire simultanément et au hasard deux boules d'une urne contenant cinq boules indiscernables au toucher et numérotées de 1 à 5.

- 1) Décrire à l'aide d'un arbre (dont on précisera le type d'expériences auxquelles il se rapporte) l'univers Ω des réalisations possibles de cette expérience. Quel est le cardinal de Ω ?
- 2) On considère les événements :
A : « L'écart entre les numéros des deux boules tirées est un multiple de 2 ».
B : « L'écart entre les numéros des boules tirées est égal à 1 ».
Vincent et Johann misent 10 F chacun. Vincent gagne si l'événement A se réalise, tandis que Johann gagne si l'événement B se réalise.
a) Les événements A et B peuvent-ils se réaliser simultanément? Quel terme du vocabulaire des probabilités peut-on utiliser à l'égard des événements A et B ?
b) Le jeu est-il équitable? Lequel des deux joueurs est avantagé?

Exercice 15 :

Un dé truqué est tel que:

- les faces (2) à (5) ont la même probabilité d'apparition;
- les faces (1) et (6) ont la même probabilité d'apparition;
- la face (1) a deux fois plus de chance d'apparaître que la face (2).

On lance une fois ce dé.

- 1) Définir l'univers Ω des réalisations possibles.
- 2) Soit P la probabilité d'apparition de la face (2).
 - a) Exprimer à l'aide de P la probabilité d'apparition de chacune des faces.
 - b) En déduire P, puis la probabilité d'apparition de chacune des faces.
- 3) Calculer la probabilité des événements:
A : « le lancer du dé donne un numéro impair » ; B : « le lancer du dé donne un numéro multiple de 3 ».

Exercice 16 :

Dans un lycée de 1200 élèves, chaque élève étudie, comme première langue, l'allemand, l'anglais ou l'espagnol. Les élèves sont internes, externes ou demi-pensionnaires. La répartition de l'ensemble des élèves est la suivante :

- ❖ 15 % étudient l'allemand en première langue et, parmi ceux-là, le tiers est demi-pensionnaire;
- ❖ 75 % étudient l'anglais en première langue et, parmi eux, 16 % sont internes ;
- ❖ parmi les élèves étudiant l'espagnol en première langue, aucun n'est interne et 20 sont externes.

- 1) Compléter, après l'avoir reproduit, le tableau suivant :
- 2) Dans cette question et les suivantes, les résultats seront donnés sous forme de fraction irréductible.

	Nombre d'externes	Nombre de demi-pensionnaires	Nombre d'internes	Total
ALLEMAND				
ANGLAIS	216			
ESPAGNOL				
Total	300			1200

On prend, au hasard, un élève parmi les 1 200 élèves du lycée, tous les élèves ayant la même probabilité d'être choisis. On considère les événements suivants :

- ❖ A : " l'élève est demi-pensionnaire " ;
 - ❖ B : " l'élève apprend l'anglais comme première langue vivante "
 - ❖ C : " l'élève apprend l'espagnol ou l'allemand comme première langue vivante " .
- a) Déterminer la probabilité de chacun des événements A, B et C.
 - b) Décrire, à l'aide d'une phrase, l'événement $A \cap B$. Calculer la probabilité de cet événement.
 - c) Déduire des questions précédentes, la probabilité de l'événement $A \cup B$.
- 3) On choisit au hasard un élève parmi les externes. Calculer alors la probabilité pour que cet élève apprenne l'espagnol comme première langue vivante.
 - 4) Sachant qu'un élève choisi apprend l'allemand comme première langue vivante, quelle est la probabilité pour qu'il soit externe ?

Exercice 17 :

A \ On dispose d'une urne contenant trois boules blanches numérotées : -1, 0, 1 et quatre boules noires numérotées : -1, -1, 0, 1 indiscernable au toucher.

- 1) On tire simultanément et au hasard deux boules de l'urne.
 - a) Calculer la probabilité des événements suivants :
A : « obtenir une seule boule blanche »
B : « obtenir une seule boule blanche et la somme des numéros marqués sur les deux boules est nulle »
C : « obtenir une seule boule blanche et le produit des numéros marqués sur les deux boules est nulle »
 - b) On répète l'épreuve précédente cinq fois en remettant à chaque fois les boules tirées dans l'urne. Calculer la probabilité de l'événement E : « obtenir trois fois une seule boule blanche après les cinq tirages »
- 2) On tire successivement et sans remise deux boules de l'urne et on notera par k le nombre de boules blanches obtenues. Déterminer les valeurs possibles de k et la probabilité de chaque valeur.
- 3) On tire successivement et avec remise deux boules de l'urne et on notera par a le numéro de la première boule et par b le numéro de la deuxième boule. Calculer la probabilité de l'événement F : « l'équation $ax^2 + bx + 1 = 0$ admet deux solutions distinctes »

B \ On suppose que l'urne contient trois boules blanches et n boules noires ($n \in \mathbb{N}^*$). On effectue des tirages successifs d'une boule en remettant à chaque fois la boule tirée dans l'urne jusqu'à l'apparition de la boule blanche et le jeu s'arrête. On note P_k la probabilité d'obtenir la boule blanche au $k^{\text{ième}}$ tirage.

- 1) Calculer P_1 , P_2 et P_k en fonction de n (avec $2 \leq k \leq n$)
- 2) Montrer que $(P_k)_{1 \leq k \leq n}$ est une suite géométrique et calculer $\lim_{k \rightarrow +\infty} P_k$

- 3) Calculer $S_k = \sum_{i=1}^k P_i$ et $\lim_{k \rightarrow +\infty} S_k$

Exercice 10 :

Un démarcheur compose au hasard un code d'accès à un immeuble, constitué de deux chiffres choisis parmi « 1 », « 2 », « 3 » ou « 4 » suivis d'une lettre choisie parmi B ou C.

- 1) Décrire à l'aide d'un arbre l'univers des réalisations possibles et donner le cardinal de l'univers.
- 2) On considère l'événement A : « Le démarcheur tape 1 comme second chiffre ». Décrire à l'aide d'un arbre l'événement A, puis en déduire le cardinal de A et la probabilité de A.
- 3) Reprendre la question 1) et 2) dans le cas où les deux chiffres sont distincts.

Exercice 1 :

La loi de probabilité ci-dessous décrit le gain a une loterie sans tenir compte du prix du billet.

gain (en D)	0	5	10	100	511
Probabilité p_i	0,6	0,2	0,1	0,075	0,6

- 1) Déterminer la probabilité de chacun des événements suivants :

A: « le joueur est gagnant » ;

C: « le joueur a gagné au plus 10 D »

B: « le joueur a gagné au moins 100 D »

$D = A \cap C$

- 1) L'organisateur du jeu prévoit de fixer le prix de billet à 15 D. Quel avenir peut-on lui prédire ?

Exercice 12 :

Un forain propose le jeu suivant: le joueur lance un dé parfaitement équilibré un certain nombre de fois. Le joueur mise 10 F. S'il obtient au moins une fois un « six » au cours de ses lancers, il gagne 20 F ; dans le cas contraire, il perd sa mise.

- 1) Le joueur lance le dé deux fois de suite.
 - a) Décrire l'univers il des réalisations possibles. Quel est le cardinal de il ?
 - b) Soit l'événement A : « le "six" n'apparaît pas au cours des deux lancers ». Décrire à l'aide d'un arbre l'événement A, puis en déduire le cardinal de A.
 - c) Déduire de b) le cardinal de l'événement « le joueur gagne », puis la probabilité qu'a le joueur de gagner.
 - d) Le joueur joue 10 fois de suite à ce jeu. Quel est en moyenne le gain ou la perte du joueur à l'issue de ces 10 parties?

- 2) a) Reprendre la question 10 dans le cas où le joueur lance le dé 3 fois de suite, puis 4 fois de suite, puis 5 fois de suite. Pour cela, on complètera le tableau ci-dessous.

b) À partir de quel nombre de lancers du dé, le jeu devient-il favorable au joueur?

- 3) Pour n entier supérieur ou égal à 1, on pose: P_n : « probabilité de gagner du joueur si le jeu consiste à lancer le dé n fois de suite ».

- a) Exprimer P_n en fonction de n.
- b) Que peut-on dire du sens de variation de la suite $(P_n)_{n \geq 1}$?
- c) Calculer la limite de la suite (P_n) lorsque n tend vers $+\infty$.
- d) Exprimer, en fonction de n, le gain du joueur à l'issue de 10 parties.

Nombre de lancers	Cardinal de l'univers	Cardinal de «aucuns six»	Cardinal de l'événement «au moins un six»	Probabilité de gagner	Gain ou perte à l'issue de 10 parties
1	6	5	1	$\frac{1}{6} = 0,17$	perte = 67 F
2	36 (6^2)				
3					
4					
5					

4 boules noires numérotées 0, 0, 3, 4
1 boule verte numérotée 1

On suppose l'équiprobabilité pour chacune des épreuves suivantes.

1) On tire simultanément 4 boules de l'urne.

Calculer la probabilité de chacune des événements suivants :

A_1 : « Obtenir un tirage unicolore »

B_1 : « Obtenir un tirage tricolore »

En déduire la probabilité de l'événement C_1 : « Obtenir un tirage bicolore »

2) On tire successivement et sans remise 4 boules de l'urne

Calculer la probabilité de chacune des événements suivants :

A_2 : « La première boule tirée porte un numéro impair »

B_2 : « Obtenir consécutivement les numéros 1 et 2 »

C_2 : « La première boule est noire et la deuxième porte un numéro pair »

3) On tire successivement et avec remise 4 boules de l'urne

Calculer la probabilité de chacune des événements suivants :

A_3 : « La somme des numéros obtenus est égale à 2 »

B_3 : « Obtenir exactement deux fois une boule noire »

C_3 : $A_3 \cup B_3$

4) On suppose que l'urne contient trois boules blanches et n boules noires ($n \in \mathbb{N}^*$). On effectue des tirages successifs d'une boule en remettant à chaque fois la boule tirée dans l'urne jusqu'à l'apparition de la boule blanche et le jeu s'arrête. On note P_k la probabilité d'obtenir la boule blanche au $k^{\text{ième}}$ tirage.

4) Montrer que $(P_k)_{1 \leq k \leq n}$ est une suite géométrique et calculer $\lim_{k \rightarrow +\infty} P_k$

5) Calculer $S_k = \sum_{i=1}^{i=k} P_i$ et $\lim_{k \rightarrow +\infty} S_k$

Exercice 1 :

Une urne contient 5 boules noires et 5 boules blanches.

I) On tire simultanément et au hasard 3 boules de l'urne. Calculer la probabilité de chacun des événements suivants : H_1 « les 3 boules tirés sont noires »

H_2 « obtenir 3 boules de même couleur »

H_3 « obtenir au moins une boule blanche »

II) On tire au hasard, successivement et sans remise 3 boules de l'urne. Calculer la probabilité de chacun des événements suivants :

L_1 « obtenir un tirage unicolore »

L_2 « tirer dans cet ordre : une boule noir, une boule blanche, une boule noire »

L_3 « obtenir exactement 2 fois une boules noires »

III) On effectue de n tirages successifs d'une boule en remettant à chaque fois la boule tirée dans l'urne.

On considère les deux événements suivants : A « On obtient des boules des deux couleurs »

B « On obtient au plus une blanche »

1) a) Calculer la probabilité de l'événement : C « toutes les boules tirées sont de même couleur »

b) Calculer la probabilité de l'événement D « on obtient exactement une boule blanche »

c) En déduire que $P(A \cap B) = \frac{n}{2^n}$; $P(A) = 1 - \frac{1}{2^{n-1}}$, $P(B) = \frac{n+1}{2^n}$

2) Démontrer que $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$ si et seulement si $2^{n-1} = n + 1$

3) Soit (U_n) la suite définie pour tout $n \geq 2$ par : $U_n = 2^{n-1} - (n + 1)$

a) Calculer U_2 , U_3 et U_4

b) Démontrer que (U_n) est croissante.

4) En déduire la valeur de l'entier n tel que les événements A et B soient indépendants ?

(Deux événements A et B sont indépendants si et seulement si $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$)

Exercice 1 :

I. Un sac contient 13 jetons indiscernables au toucher :

- Trois jetons noirs marqués A, B et C.

- Dix jetons blancs numérotés 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 et 10.

1) On extrait simultanément et au hasard cinq jetons du sac. On considère les événements suivants :

R : Obtenir les trois jetons noirs ;

S : Obtenir le jeton marqué C ;

T : Obtenir au moins un jeton noir.

Calculez la probabilité des événements R , S , T . Donnez les résultats sous forme décimale à 10^{-2} près par défaut.

2) On tire au hasard, l'un après l'autre, et sans remise, tous les jetons du sac. On dit qu'on a eu « BAC » si dans la suite des jetons tirés on a obtenu les jetons noirs B, A, C consécutivement et dans cet ordre.

Exemple :

Le tirage (5, 6, 3, B, A, C, 8, 1, 7, 4, 9, 2, 10) donne « BAC » ;

Le tirage (1, 3, B, 4, 5, A, C, 10, 2, 7, 6, 9, 8) ne donne pas « BAC » ;

Le tirage (1, 5, 7, 8, A, B, C, 3, 9, 10, 4, 6, 2) ne donne pas « BAC » ;

Calculez la probabilité de l'événement : « obtenir "BAC" ». (Donnez le résultat sous forme de fraction irréductible.)

II. On dispose des dix jetons blancs et de quatre tiroirs T_1 , T_2 , T_3 et T_4 .

- 1) De combien de manières différentes peut-on ranger les jetons dans les quatre tiroirs.
- 2) Reprenez la première question en supposant qu'il y a au moins un jeton par tiroir.

III. n étant un entier naturel non nul. On effectue n tirages successifs d'un jeton avec remise.
Soit E_n l'événement : « obtenir au cours de ces n tirages un jeton noir uniquement au dernier tirage ».
On désigne par P_n la probabilité de l'événement E_n .

- 1) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $P_n = \frac{3}{13} \left(\frac{10}{13} \right)^{n-1}$
- 2) Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} P_n$
- 3) Soit $S_n = P_1 + P_2 + P_3 + \dots + P_n$. Calculer S_n en fonction de n .

1-4
carte -,du de
tiree

C₁

C₂

C₃

C₄

(2; C₃)

_____ 25) Un representant de commerce doit visiter succes-
sivement quatre villes A, B, C et D.

1° A l'aide d'un arbre, determiner tous les itineraires permettant de visiter les quatre villes.

2° Le representant choisit au hasard l'un de ces itineraires.

Calculer la probabilite que, sur cet itineraire, les villes C et D se suivent dans cet ordre.

b) Calculer la probabilite que cet itineraire commence par la ville C et se termine par la ville D.

c) Calculer la probabilite que, sur cet itineraire, la ville C soit situee avant la ville D.

Le « digicode » de la porte d'entree d'un immeuble
propose un clavier a 12 touches ; elles sont marquees de 10 chiffres de 0 a 9, et des deux lettres V et W.

Un code est forme d'une lettre, suivie d'un nombre a trois chiffres (comme par exemple V037).

1° Quelle est la probabilite pour qu'en composant un code au hasard, on obtienne le code correct ?

2° Quelle est la probabilite pour que le code correct se termine par 0 ?