Sommaire : Définitions - Formule générale - Vecteurs orthogonaux - Carré scalaire, norme d'un vecteur - Propriétés - Expression analytique du produit scalaire

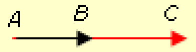
1. Définitions

Notation

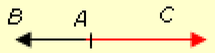
Le produit scalaire des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est noté $\vec{u} \cdot \vec{v}$.

Vecteurs colinéaires

Si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires et de même sens, $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AC$.



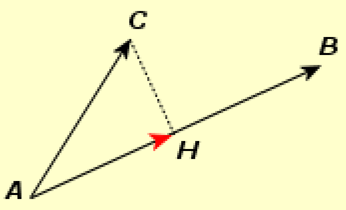
Si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires et de sens contraires, $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = -AB \times AC$.



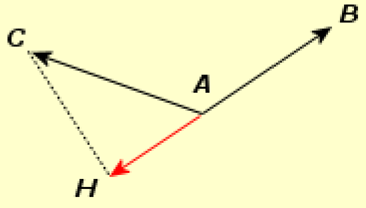
Vecteurs non colinéaires

Si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont non colinéaires et si H est le projeté orthogonal de C sur (AB), alors $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AH}$ donc :

- si $H \in [AB]$ alors $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AH$;

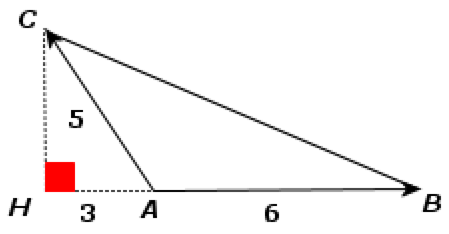


- si $H \notin [AB]$ alors $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = -AB \times AH$.



Exemple : Le triangle ABC est tel que $AC = 5$ et $AB = 6$.

H est le projeté orthogonal de C sur (AB) ; $AH = 3$
$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = -AB \times AH$ (car $H \notin [AB]$) donc $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = (-6) \times 3 = -18$.



Remarque : Si l'on utilise le cosinus de l'angle $\widehat{BAC}$, les définitions ci-dessus se traduisent par :
« quels que soient A, B et C, $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos \widehat{BAC}$ ».

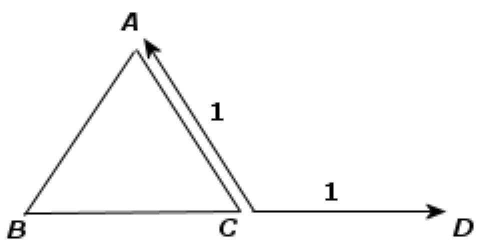
Formule générale

Le produit scalaire des vecteurs $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$ est le nombre tel que :

- si $\vec{u} = \vec{0}$ ou $\vec{v} = \vec{0}$ alors $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$;
- si $\vec{u} \neq \vec{0}$ et $\vec{v} \neq \vec{0}$, avec $\vec{u} \cdot \vec{v} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos \widehat{BAC}$.

Exemple : ABC est un triangle équilatéral de côté 1, $D \in (BC)$ et $CD = 1$.

$\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CD} = CA \times CD \times \cos \widehat{CAD}$;
$\widehat{ACB} = 60°$ donc $\widehat{ACD} = 120°$;
$\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CD} = 1 \times 1 \times \cos 120° = -\dfrac{1}{2}$.



2. Vecteurs orthogonaux

Soit $(S)\begin{cases} ax+ \ by+ \ cz = d \\ a'x+ \ b'y+ \ c'z = d' \\ a''x+b''y+c''z = d'' \end{cases}$ un système linéaire d'inconnues $(x\,;y\,;\,z)$.

La méthode consiste à rendre ce système triangulaire en effectuant des combinaisons linéaires:

$$\begin{cases} ax+by+cz=d \\ \alpha y+\beta z=\delta \\ \lambda z=\varepsilon \end{cases}.$$

3. Carré scalaire - Norme d'un vecteur

Définitions

Le **carré scalaire** du vecteur $\vec{u}$, noté $\vec{u}^2$, est le produit scalaire du vecteur $\vec{u}$ par lui-même, $\vec{u}\cdot\vec{u}$.

La **norme** du vecteur $\vec{u}$, noté $\|\vec{u}\|$, est le nombre tel que $\|\vec{u}\|^2 = \vec{u}\cdot\vec{u} = \vec{u}^2$.

Si $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$, alors $\|\vec{u}\| = \|\overrightarrow{AB}\| = AB$.

Exemple : (OI) et (OJ) sont deux droites perpendiculaires ; $OI = 1$ et $OJ = 2$; $\vec{i} = \overrightarrow{OI}$ et $\vec{j} = \overrightarrow{OJ}$.

$\vec{i}$ et $\vec{j}$ sont orthogonaux, donc $\vec{i}\cdot\vec{j} = 0$.

Les normes des vecteurs sont $\|\vec{i}\| = 1$ et $\|\vec{j}\| = 2$.

4. Propriétés

Formules

Quels que soient les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ et le nombre réel a :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$$
$$\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$$
$$(a\vec{u}) \cdot \vec{v} = a(\vec{u} \cdot \vec{v}).$$

Exemple : Quels que soient O; A; B; C :
$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{OA} \cdot (\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB}) = \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}$.

Conséquences

Quels que soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$:

$$(\vec{u} + \vec{v})^2 = \vec{u}^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v}^2 = \|\vec{u}\|^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \|\vec{v}\|^2$$
$$(\vec{u} - \vec{v})^2 = \vec{u}^2 - 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v}^2 = \|\vec{u}\|^2 - 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \|\vec{v}\|^2$$
$$(\vec{u} + \vec{v})(\vec{u} - \vec{v}) = \vec{u}^2 - \vec{v}^2 = \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2.$$

Les techniques de calcul concernant le produit scalaire sont les mêmes que celles de l'addition et la multiplication dans l'ensemble des nombres réels.

Exemple : Si $\|\vec{u}\| = 3$; $\|\vec{v}\| = 2$; $\vec{u} \cdot \vec{v} = -4$; alors $(\vec{u} - \vec{v}) \cdot (\vec{u} + 2\vec{v}) = 5$.

En effet :
$(\vec{u} - \vec{v}) \cdot (\vec{u} + 2\vec{v}) = \vec{u}^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v} - \vec{v} \cdot \vec{u} - 2\vec{v}^2 = \|\vec{u}\|^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v} - 2\|\vec{v}\|^2 = 9 - 8 + 4 = 5$.

Si dans un repère **orthonormal** (où les vecteurs de base sont orthogonaux et de norme 1), le vecteur $\vec{u}$ a pour coordonnées le couple $(x ; y)$ et le vecteur $\vec{v}$ le couple $(x' ; y')$, alors $\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy'$.

- **Exemple 1 :**

Si dans un repère orthonormal, $\overrightarrow{AB}(-2 ; 1)$ et $\overrightarrow{CD}(5 ; -1)$, alors $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = -11$.
En effet, $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = (-2) \times 5 + 1 \times (-1) = -10 - 1 = -11$.

- **Exemple 2 :**

Si dans un repère orthonormal, $\overrightarrow{AB}(\sqrt{3} ; 2)$ et $\overrightarrow{AC}(-2 ; \sqrt{3})$ alors ABC est un triangle rectangle et isocèle.

En effet :
$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = -2\sqrt{3} + 2\sqrt{3} = 0$ donc $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont orthogonaux et le triangle ABC est rectangle en A.

$\|\overrightarrow{AB}\|^2 = (\sqrt{3})^2 + 2^2 = 7$ et $\|\overrightarrow{AC}\|^2 = (-2)^2 + (\sqrt{3})^2 = 7$

Donc $AB = AC = \sqrt{7}$ et le triangle ABC est isocèle en A.