Fiche : Continuité et dérivabilité

Limite finie en $+\infty$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = l$$

La droite d'équation $y = l$ est asymptote horizontale à la courbe Cf en $+\infty$.

Asymptote oblique

$$\lim_{x \to \infty} f(x) - (ax + b) = 0$$

La droite d'équation D : $y = ax + b$ est asymptote oblique à Cf en ∞.

Limite infinie en a

$$\lim_{x \to a} f(x) = +\infty$$

La droite d'équation $x = a$ est asymptote verticale à Cf.

Limite finie en a

$$\lim_{x \to a} f(x) = l$$

Il existe 4 formes indéterminées :

- $(+\infty) + (-\infty) = \text{FI}$
- $\dfrac{0}{0} = \text{FI}$
- $0 \times \infty = \text{FI}$
- $\dfrac{\infty}{\infty} = \text{FI}$

Théorème des gendarmes

α désigne un réel ou $+\infty$ ou $-\infty$ et l un réel
f, g et h sont 3 fonctions définies sur un intervalle I voisinage de α
Si $\forall$ x de I, $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ et $\lim_{x \to \alpha} g(x) = \lim_{x \to \alpha} h(x) = l$ alors $\lim_{x \to \alpha} f(x) = l$.

Application :

$g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ et $\lim g(x) = \lim h(x)$
D'après le théorème des gendarmes :

$$\lim g(x) \leq \lim f(x) \leq \lim h(x)$$

donc $\lim f(x) = g(x)$

Théorème fondamentale

Toute fonction dérivable sur un intervalle I ouvert est continue.

Corollaire du théorème des valeurs intermédiaires

Si f est une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I, alors :

- l'ensemble des f(x) avec x appartenant à I est un intervalle J, dont les bornes sont les limites de f aux bornes de I
- $\forall$ k réel de J, l'équation $f(x) = k$ admet une solution unique dans I.

Application :

f continue et strictement monotone sur I

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$

$a \in]-\infty ; +\infty[$ (a désignant la valeur que l'on recherche)

D'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation f(x) = a admet une solution unique sur I

calculatrice (table) pour trouver la valeur

Définition

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I contenant le réel a.

Le nombre dérivé de f en a est, s'il existe, le nombre :

$$f'(x) = \lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$

Interprétation graphique :

Lorsque f est dérivable en a, la courbe représentative de f admet au point A(a ; f(a)) une tangente de coefficient directeur f'(a). Cette tangente a pour équation :

$$y = f'(a)(x - a) + f(a).$$

Tableaux des dérivées

f(x)	f'(x)
k	0
x	1
x^n	nx^{n-1}
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
$\frac{1}{x^n}$	$-\frac{n}{x^{n+1}}$
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$
$\tan x$	$\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$
$\sin(ax + b)$	$a\cos(ax + b)$
$\cos(ax + b)$	$-a\sin(ax + b)$
e^x	e^x
$\ln x$	$\frac{1}{x}$

f	f'
Ku	ku'
$u + v$	$u' + v'$
u^n	$nu'u^{n-1}$
$\frac{1}{v}$	$-\frac{v'}{v^2}$
$\sqrt{u}$	$\frac{u'}{2\sqrt{u}}$
$\frac{1}{u^n}$	$-\frac{nu'}{u^{n+1}}$
$\sin u$	$u'\cos x$
$\cos u$	$-u'\sin x$
$\tan u$	$\frac{u'}{\cos^2 u} = u'(1 + \tan^2 x)$
$\frac{u}{v}$	$\frac{u'v - uv'}{v^2}$
$u \circ v$	$u'v'(u)$
e^u	$u'e^u$
$\ln u$	$\frac{u'}{u}$