

Exercice 5 :

On considère deux points A et B tels que $AB = 4$.

Le but de cet exercice est de déterminer de deux façons différentes l'ensemble \mathcal{C} des points M

du plan tels que $\frac{MA}{MB} = 5$.

Question préliminaire :

Montrer que $\frac{MA}{MB} = 5$ est équivalent à $MA^2 - 25MB^2 = 0$.

Méthode 1

On considère les points G barycentre de (A; 1), (B; 5) et G' barycentre de (A; 1) et (B; -5).

1- Exprimer \overrightarrow{AG} et $\overrightarrow{AG'}$ en fonction de \overrightarrow{AB} .

2- Écrire plus simplement les sommes $\overrightarrow{MA} + 5 \overrightarrow{MB}$ et $\overrightarrow{MA} - 5 \overrightarrow{MB}$.

3- En calculant le produit scalaire $(\overrightarrow{MA} + 5 \overrightarrow{MB}) \cdot (\overrightarrow{MA} - 5 \overrightarrow{MB})$,
exprimer $MA^2 - 25MB^2$ en fonction de \overrightarrow{MG} et $\overrightarrow{MG'}$.

4- En déduire l'ensemble \mathcal{C} des points M du plan tels que $MA^2 - 25MB^2 = 0$.

Méthode 2

Soit K le point défini par $\overrightarrow{AK} = \frac{25}{24} \overrightarrow{AB}$

1- Montrer que K est le barycentre de (A; 1) et (B; -25).

2- Calculer KA^2 et KB^2 .

3- Montrer que $MA^2 - 25MB^2 = -24MK^2 + \frac{50}{3}$

4- En déduire l'ensemble \mathcal{C} des points M du plan tel que $MA^2 - 25MB^2 = 0$.

Exercice 6 :

Soient A et B deux points du plan tels que : $AB=4$ et I le milieu de $[AB]$.

1) Construire le point C tel que ABC soit rectangle en C.

2) Montrer que $\forall M \in \text{plan} : MA^2 + MB^2 = 2MI^2 + \frac{AB^2}{2}$

3) a/ soit J le point défini par : $\overrightarrow{JA} + \overrightarrow{JB} + 2\overrightarrow{JC} = \vec{0}$.

Montrer que J est le milieu de segment $[CI]$.

b/ Montrer que $\forall M \in \text{plan} : MA^2 + MB^2 + 2MC^2 = 4MJ^2 + \frac{3}{4}AB^2$

c/ Déterminer l'ensemble $E = \{M \in \text{plan} / MA^2 + MB^2 + 2MC^2 = 28\}$

4) a/ Montrer que $\forall M \in \text{plan} : MA^2 + MB^2 - 2MC^2 = CA^2 + CB^2 + 4\overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{CI}$

b/ Déterminer et construire l'ensemble $\{M \in \text{plan} / MA^2 + MB^2 - 2MC^2 = 8\}$

Exercice 7 :

$[AB]$ est un segment de longueur 6 et de milieu I.

1) Déterminer et construire l'ensemble \mathfrak{R} des points M du plan vérifiant :

$$\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BM} \cdot \overrightarrow{AB} = 12$$

2) On cherche à déterminer l'ensemble Γ des points M du plan vérifiant l'égalité (1)

$$MB = 2MA$$

a) Montrer que l'égalité (1) est équivalente à : $(\overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MA}) \cdot (\overrightarrow{MB} - 2\overrightarrow{MA}) = 0$

En utilisant les points R, barycentre de (A ; 2) et (B ; 1) et S, barycentre de (A ; -2) et (B ; 1), déterminer et construire