LYCEE MAJIDA BOULILA SFAX LE 10 / 12 / 2010	Devoir de synthèse N°1 MATHEMATIQUES	CLASSE : $3^{ème}$Maths 1 -2 – 3 DUREE : 2 heures

Exercice n°1 (3 pts)

I) Cocher la bonne réponse

1. Soit x un réel on pose $A = \sin(5\pi + x) + \cos\left(x - \frac{45\pi}{2}\right)$

   a) A=2sin(x) b) A=0 c) A=sin x +cos x

2. Soit f une fonction définie sur IR * vérifiant $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 2$ et $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = 2$

   a) f est prolongeable par continuité en 0 b) f est une fonction continue en 0 c) f(0)=2

3. Le plan est orienté dans le sens direct. Soit A,B et C trois points distincts si on a $\left(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}}\right) \equiv \alpha\,[2\pi]$

   Alors une mesure de $\left(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{BA}\right)$ est

   a) $\pi - \alpha$ b) $\pi + \alpha$ c) $\alpha - \pi$

II) Répondre par vrai ou faux en justifiant

1. L'équation (E) : $x^3 + x - 1 = 0$ admet au moins une solution a dans [0,1]
2. Soit la fonction f définie sur IR par $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+4}}$. La droite D : y = 1 est une asymptote à la courbe de f au voisinage de $-\infty$
3. Soit f une fonction définie sur [1,3] et f([1,3]) =[1,3] alors f est continue sur [1,3].

Exercice n°2 (5pts)

Le plan P est orienté dans le sens direct. Soit $\mathcal{C}$ un cercle de centre O de diamètre [AB] et E $\in (AB)\backslash\{A,B\}$ comme l'indique la figure (page 3)

1. Placer le point F de $\mathcal{C}$ tel que $\left(\widehat{\overrightarrow{OE},\overrightarrow{OF}}\right) \equiv \frac{\pi}{6}[2\pi]$
2. Déterminer la mesure principale de chacun des angles orientés $\left(\overrightarrow{EF},\overrightarrow{EO}\right)$ et $\left(\overrightarrow{AE},\overrightarrow{AF}\right)$
3. Soit D le point d'intersection des droites (EA) et (FB). Montrer que $2\left(\widehat{\overrightarrow{DF},\overrightarrow{DE}}\right) \equiv \frac{5\pi}{6}[2\pi]$

   En déduire la mesure principale de $\left(\overrightarrow{DF},\overrightarrow{DE}\right)$
4. Soit $\mathcal{C}'$ le cercle circonscrit au triangle EDF de centre O' et (ET) la tangente en E à $\mathcal{C}'$

   tel que $\left(\widehat{\overrightarrow{EO'},\overrightarrow{ET}}\right) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$

   a) Montrer que $2\left(\widehat{\overrightarrow{EF},\overrightarrow{ET}}\right) \equiv \frac{5\pi}{6}[2\pi]$

   b) En déduire que la droite (OE) est la tangente à $\mathcal{C}'$ en E
5. Soit $\Gamma = \left\{M \in P \text{ tel que } \left(\widehat{\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB}}\right) \equiv \frac{-5\pi}{12}[2\pi]\right\}$

   a) Vérifier que D $\in \Gamma$

   b) Déterminer et construire Γ

Exercice n°3 (5pts)

Dans le plan P orienté dans le sens direct. On considère un carré ABCD tel que AB=3 et $\left(\widehat{\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AB}}\right) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$

ABK un triangle rectangle en B direct tel que BK= 2 . Soit le point J de [CD] tel que JC=1

1. Montrer que $\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AK} = -6$ et $\overrightarrow{JD}.\overrightarrow{AK} = -6$
2. En déduire que (AJ) est perpendiculaire à (AK)
3. Calculer DK et KJ
4. Montrer que $DJ^2 = DK^2 + KJ^2 - 2\overrightarrow{KD}.\overrightarrow{KJ}$ en déduire $\overrightarrow{KD}.\overrightarrow{KJ} = 28$
5. Soit I le milieu de [JK]

   Montrer que $DJ^2 + DK^2 = 2DI^2 + \frac{JK^2}{2}$ en déduire que $DI = \frac{5\sqrt{2}}{2}$

6. Soit $\Gamma = \{M \in P \; tel \; que \; \overrightarrow{MJ}.\overrightarrow{MK} = 6\}$
   a) Montrer que l'ensemble Γ est le cercle de centre I et de rayon $\frac{5\sqrt{2}}{2}$
   b) Construire Γ

Exercice n°4 (7pts)

Soit la fonction f définie sur IR par $\begin{cases} f(x) = \frac{1-3x}{x-3} & si \; x < 2 \\ f(x) = \sqrt{x^2-3} + x + 2 & si \; x \geq 2 \end{cases}$ et $\mathcal{C}_f$ sa courbe dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ du plan.

1. a) Calculer $\lim_{x \to -\infty} f(x)$. Interpréter graphiquement le résultat
   b) Calculer $\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x}$ et $\lim_{x \to +\infty} f(x) - 2x$
   c) Montrer que la droite $\Delta: y = 2x + 2$ est une asymptote oblique à la courbe de f
2. a) Montrer que f est continue en 2
   b) Etudier la dérivabilité de f en 2 ; Interpréter graphiquement le résultat
3. a)Montrer que f est dérivable sur $]-\infty, 2[$ et calculer $f'(a)$ avec a $\in]-\infty, 2[$
   b) Déterminer le point A d'abscisse a$\in]-\infty, 2[$ tel que la tangente à la courbe de f en A soit parallèle à la droite $\Delta: y = 2x + 2$
4. a)Vérifier que pour tout $x \in [2, +\infty[\setminus \{2\sqrt{3}\}$ on a $\frac{f(x)-f(2\sqrt{3})}{x-2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{x^2-3}-3}{x-2\sqrt{3}} + 1$
   b) Montrer que la fonction f est dérivable en $2\sqrt{3}$ et préciser $f'(2\sqrt{3})$
   c) Déterminer l'équation de la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point $B(2\sqrt{3}, 5 + 2\sqrt{3})$

Lycée Majida Boulila Sfax | Devoir contrôle n°1 | M : JARRAYA MAHER
Le 8-11-2010 Durée 2 H | 3 Maths 2

Exercice n°1 : (4 pts)

I – Pour chacune des questions suivantes, une seule des quatre réponses proposées est exacte.

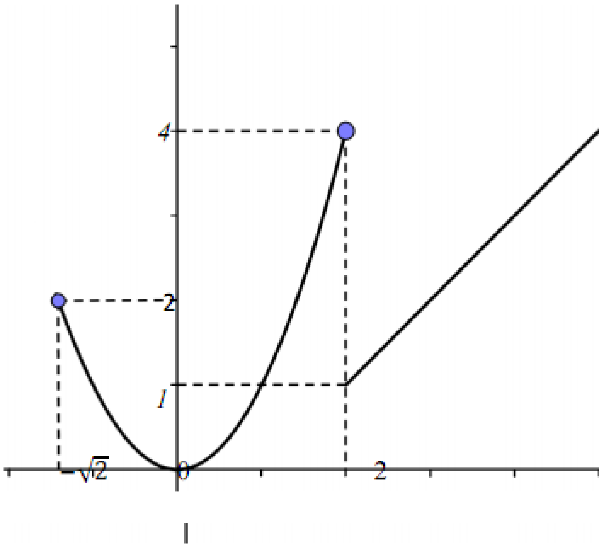
1) Soit ABC un triangle et H le projeté orthogonal de A sur (BC) .le produit scalaire de $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ est:

a) AH^2 b) $AH^2 - HB \times HC$ c) $AH^2 + HB \times HC$ d) $AB \times AC$

2) Si $ABCD$ un carré de coté 1. Alors le produit scalaire $\overrightarrow{DC}.\overrightarrow{BD}$ est égal à :

a) $\sqrt{2}$ b) 1 c) $-\sqrt{2}$ d) -1

II – Dans le plan muni d'un repère orthogonal, Cf est la courbe représentative de la fonction f définie sur $[-\sqrt{2},+\infty[$.



Répondre par Vrai ou Faux :

1. $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = 4$
2. $f(2) = 1$
3. Le domaine de continuité de f est :$IR \setminus \{2\}$
4. 4 est le maximum de f sur Df
5. Pour tout $x \in [-\sqrt{2}\ ; \sqrt{2}]$, on a : $2 \le f(x) \le 4$
6. $f([-\sqrt{2}\ ; 3]) = [0\ ; 4]$

Exercice n°2 (6pts)

1) Soit la fonction g définie par $g(x) = \frac{\sqrt{3x-2}-2}{3x-6}$
   a) Déterminer le domaine de g
   b) Montrer que g admet un prolongement par continue en 2 et définir ce prolongement G
   c) Montrer que g est borné sur son domaine de définition.
   d) Le réel $\frac{1}{2}$ est il un maximum de G ?

2) Soit m un réel et soit f la fonction définie par : $\begin{cases} f(x) = \dfrac{x^2 - |x|}{x^2 + x - 2} & \text{si } x < 1 \\ f(x) = \dfrac{\sqrt{3x-2}-2}{3x-6} & \text{si } 1 \le x < 2 \\ f(x) = \sqrt{x^2-4} + mx & \text{si } x \ge 2 \end{cases}$
   a) Déterminer le domaine de définition D de f.
   b) Justifier que f est continue en 1.
   c) Déterminer la valeur de m pour laquelle f est continue en 2.

3) Soit l'équation (E) : $3x^3 + 6x^2 - 3x - 4 = 0$
   a) Montrer que l'équation (E) admet au moins une solution $\alpha \in]-1,0[$
   b) Montrer que $f(\alpha) = -2 - 3\alpha$.

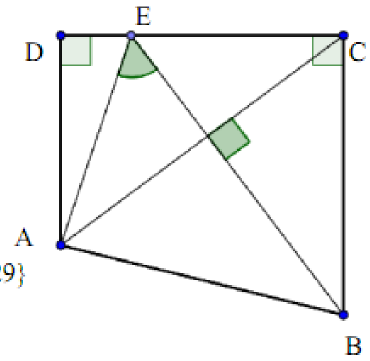
Exercice n°3(7 pts)

$ABCD$ un trapèze rectangle en C et D. tels que AD=3 , DC= CB=4

et E est un point défini $\overrightarrow{DE} = \frac{1}{4}\overrightarrow{DC}$

1) Montrer que : $(\overrightarrow{ED}+\overrightarrow{DA}).(\overrightarrow{EC}+\overrightarrow{CB}) = \overrightarrow{ED}.\overrightarrow{EC}+\overrightarrow{DA}.\overrightarrow{CB}$

2) *a)* Calculer $\overrightarrow{ED}.\overrightarrow{EC}$ et $\overrightarrow{DA}.\overrightarrow{CB}$.



b) En déduire que : $\overrightarrow{EA}.\overrightarrow{EB} = 9$

c) Calculer EA et EB puis $\cos(\widehat{AEB})$

d) Montrer que $AB = \sqrt{17}$

3) Soit H le projeté orthogonal de A sur (BC)

a) Calculer $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB}$ et $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CE}$

b)En Déduire que $(CA) \perp (BE)$

4) On considère l'ensemble $\Delta = \{M \in P \text{ tel que } MB^2 + MC^2 - 2\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MC} = 29\}$

Soit $I = B * C$ et $J = A * C$.

a) Montrer que $BJ^2 = \frac{41}{4}$ puis vérifier que $J \in \Delta$.

b) Montrer que pour tout point $M \in P$ on a : $MB^2 + MC^2 - 2\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MC} = 2(MI^2 - MJ^2) + \frac{41}{2}$

c) Montrer que :$MI^2 - MJ^2 = 2\overrightarrow{MJ}.\overrightarrow{JI} + \frac{17}{4}$

d) Déterminer l'ensemble Δ .

<u>Exercice n°4</u> (3 pts)

Sur la figure ci-dessus, DEFG est un parallélogramme indirect et les points A, B, C, D , E, F, G sont tels que :

$(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{BC}) \equiv -\frac{\pi}{3} \quad [2\pi]$ $\quad (\overrightarrow{CB};\overrightarrow{CD}) \equiv -\frac{3\pi}{4} \quad [2\pi]$ $\quad (\overrightarrow{DC};\overrightarrow{DE}) \equiv -\frac{5\pi}{6} \quad [2\pi]$

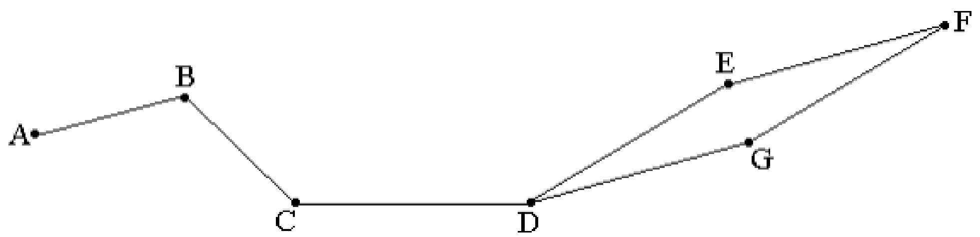
et $(\overrightarrow{FE};\overrightarrow{FG}) \equiv \frac{\pi}{12} \quad [2\pi]$.

1) En utilisant la relation de Chasles des angles orientés et les propriétés du cours, calculer une mesure en radian de l'angle $(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{GD})$

2) Que peut-on en déduire concernant les droites (AB) et (DG) ?

3) Calculer une mesure en radian de l'angle $(\overrightarrow{ED};\overrightarrow{BC})$.

Les droites (ED) et (BC) sont elles perpendiculaires ?



Exercice n°1 (3pts)

QCM : Trouver la bonne réponse

1. Pour tout réel x on a $\sin\left(\frac{-7\pi}{2}+x\right)$ est égale à

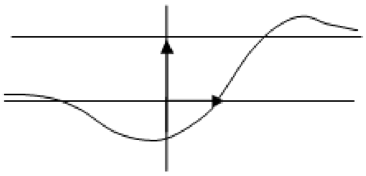
   $a)\sin x$ $b)\cos x$ $c)\ -\cos x$

2. Soit ABC un triangle rectangle et isocèle direct en A alors $\det(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BC})$ est :

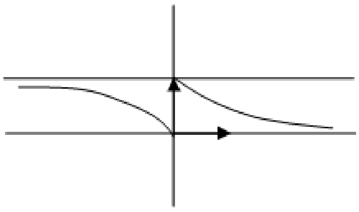
   $a)\ AC^2$ $b)BC^2$ $c)\ -AC^2$

3. *Soit* f est une fonction continue sur IR telle que $\lim_{x\to+\infty} f(x)=1$ et $\lim_{x\to-\infty} f(x)=0$. La courbe représentative de f peut avoir l'allure suivante :

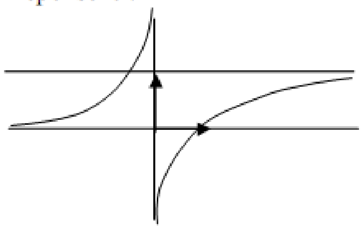
   Réponse a :



   Réponse b :



   Réponse c :



4. On considère la fonction f définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x)=2x-1+\frac{1}{2x}$.

Dans un repère orthogonal, la courbe représentative de la fonction f admet au voisinage de $+\infty$:

a. L'axe des abscisses comme asymptote horizontale
b. La droite d'équation $y=2x$ comme asymptote oblique
c. La droite d'équation $y=2x-1$ comme asymptote oblique

Exercice n°2 (7pts)

Soit la fonction f définie sur IR par $\begin{cases} f(x)=\frac{\sqrt{x^2+4}-2}{x}+1 & , x<0 \\ f(x)=\frac{x^2+4x+1}{x+1} & , x\geq 0 \end{cases}$

On désigne par $\mathcal{C}_f$ la courbe de f dans un repère orthonormé $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$

1. Montrer que f est continue en 0
2. Etudier la dérivabilité de f en 0 et donner les équations des demi-tangentes à $\mathcal{C}_f$ au point A(1,0)
3. Calculer $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ .Interpréter graphiquement le résultat
4. Montrer que la droite Δ: $y=x+3$ est une asymptote à $\mathcal{C}_f$ au voisinage de $+\infty$
5. a) Montrer que f est dérivable sur$]-\infty,0[$et que $f'(x)=\frac{2}{(\sqrt{x^2+4}+2)\sqrt{x^2+4}}$ pour tout $x\in]-\infty,0[$

b) Montrer que pour tout $x \in]-\infty,0[$ on a $f'(x) \leq \frac{1}{4}$

c)Existe –t-il un point de C_f d'abscisse a $\in]-\infty,0[$ ou la tangente à C_f est parallèle à Δ : $y = x + 1$

6. a) Montrer que pour tout x >0 on a $f\ x) = \frac{x^2+2x+3}{(x+1)^2}$

b) Trouver le point de C_f d'abscisse a>0 ou la tangente à pour équation D: $y = \frac{3}{2}(x+1)$

Exercice n°3 (4 pts)

On considère un triangle isocèle en A tel que AB=AC=5 et BC=8.On désigne par G son centre de gravité.

I le milieu de [BC] et par O le milieu de [AI]

1. Calculer $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB}$ et $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AB}$. En déduire $\cos(\widehat{BAC})$
2. Déterminer l'ensemble E des points M tel que $MA^2 - MI^2 = 3$
3. Montrer que pour tout point M du plan on a $2MA^2 + \overrightarrow{MA}(\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}) = 4\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MO}$
4. En déduire l'ensemble des points M du plan tel que $\overrightarrow{AM}.(\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}) = MA^2$

Exercice n°4 (6pts)

Le plan est oriente dans le sens direct .Soit C le cercle de centre O et [BC] un diamètre de C et A le point de C tel que $(\widehat{\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BA}}) \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi]$. On désigne par I le milieu de [AC]. La droite (BI) recoupe C en J

1. Faites une figure.
2. Calculer$(\widehat{\overrightarrow{JA},\overrightarrow{JC}})$. En déduire$\Gamma = \left\{M \in P \text{ tel que } (\widehat{\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MC}}) \equiv \frac{2\pi}{3}[2\pi]\right\}$
3. La tangente en A à C coupe (OI) en K
   a) Montrer que $(\widehat{\overrightarrow{AK},\overrightarrow{AC}}) \equiv (\widehat{\overrightarrow{OK},\overrightarrow{OC}})[2\pi]$
   b) Montrer que (CK) est tangente à C en C .
4. Soit M un point de l'arc orienté $\widehat{BC}$ de C privé de B et C et Δ la parallèle à (AB) passant par C .

   On désigne par E, F et G les projetés orthogonaux de M respectivement sur les droites (BC), (BA) et Δ

   a) Montrer que les points B, F, M et E appartiennent à un même cercle C_1 que l'on précisera
   b) Montrer que C, E , M et G appartiennent à un même cercle C_2
   c) Montrer que $2(\widehat{\overrightarrow{EF},\overrightarrow{EG}}) \equiv \pi[2\pi]$. En déduire la nature du triangle EFG.