Série 15 — $3^{ème}$ Math

Exercice 1 :

On considère les nombres complexes suivants : $z_1 = 1 - i$; $z_2 = 1 - i\sqrt{3}$; $z_3 = 2i$

$z_4 = -3$; $U = \frac{{z_1}^5}{{z_2}^4}$; $V = \frac{\overline{z_2}}{z_3}$; $W = -3z_2.z_3$

1) Ecrire sous forme trigonométrique de z_1 , z_2 , z_3 , z_4 , U , V et W

2) Déterminer $n \in \mathbb{Z}$ dans chacun des cas suivants

a) $U^n \in \mathbb{R}$; b) $V^n \in i\mathbb{R}$

3) a- Ecrire U sous forme algébrique

b- En déduire $\sin\frac{\pi}{12}$ et $\cos\frac{\pi}{12}$

Exercice 2 :

On considère les nombres complexes suivants : $\alpha = \frac{1-i\sqrt{3}}{2}$; $\beta = \frac{3+i\sqrt{3}}{2}$

1) Ecrire α et β sous forme trigonométrique

2) Soit $\theta \in]0,\pi[$. On donne $z_1 = 1 - \cos\theta + i\sin\theta$; $z_2 = 1 + \cos\theta + i\sin\theta$

a- Ecrire sous forme trigonométrique z_1 et z_2

b- Déterminer θ pour que l'on ait $z_1 = \alpha$ et $z_2 = \beta$

3) Le plan étant rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{U},\vec{V})$ on considère $M_1(z_1)$ et $A(1)$

Déterminer et construire l'ensemble des points $M_1(z_1)$ lorsque θ décrit $]0,\pi[$.

Exercice 3:

Le plan étant rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{U},\vec{V})$ on considère les points :

$A(z_0 = 1 + i)$; $M_1(z_1 = (1 + i)\cos\theta)$; $M_2(z_2 = (1 - i)\cos\theta)$ avec $\theta \in \left]0,\frac{\pi}{2}\right[$

1) Ecrire sous forme trigonométrique z_0 ; z_1 et z_2

2) Montrer que A , O et M_1 sont alignés

3) Déterminer et construire l'ensemble des points $M_1(z_1)$ lorsque θ décrit $\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$.

4) On pose $Z = \frac{z_2}{z_1}$

a) Ecrire sous forme trigonométrique Z

b) Montrer $(\overrightarrow{OM_1},\overrightarrow{OM_2}) \equiv \arg(z)[2\pi]$

c) En déduire la nature du triangle OM_1M_2

5) a)Déterminer l'affixe du point M_3 tel que$OM_1M_3M_2$ soit un carré.

b) Calculer l'aire du carré $OM_1M_3M_2$ en fonction de θ

c)Déterminer θ pour que cette aire soit égale $\frac{1}{2}$

Exercice 4:

Soit u_n une suite définie sur ℕ par : $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \dfrac{3u_n + 2}{u_n + 2} \end{cases}$

1) Montrez que $\forall\, n \in \mathbb{N}$; $0 \le u_n < 2$.

2) a/ Montrez que u_n est une suite croissante.

b/ En déduire que u_n est convergente puis calculer sa limite.

3) Soit v_n $n \in \mathbb{N}$ définie par : $v_n = \dfrac{u_n - 2}{u_n + 1}$

a/Montrez que v_n est une suite géométrique ;
calculer sa raison et son premier terme.

b/ Exprimer v_n puis u_n en fonction de n.

c/ Retrouver alors $\lim\limits_{n\to\infty} u_n$

3) a/Montrer que $|U_{n+1} - 2| \leq \frac{1}{2}|U_n - 2|$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

b/En déduire que $|U_n - 2| \leq 2.(\frac{1}{2})^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

c/Retrouver alors $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$

Exercice 5:

On considère la suite u_n $n\in\mathbb{N}$ définie par $\begin{cases} u_0 = 5 \\ u_{n+1} = \sqrt{12 + u_n} \end{cases}$

1) Montrez que $\forall\ n \in \mathbb{N}$; $u_n \geq 4$

2) a/ Montrez que la suite u_n est décroissante.

b/ En déduire que u_n est convergente puis calculer sa limite.

3)a/ Montrez que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $0 \leq (u_{n+1} - 4) \leq \frac{1}{8}(u_n - 4)$

b/ Montrez que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $0 \leq u_n - 4 \leq (\frac{1}{8})^n$

c/En déduire que u_n est convergente puis calculer sa limite.

Exercice 6:

Soit (u)la suite définie sur ℕ par : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{u_n}{\sqrt{2 + (u_n)^2}} \end{cases}$

1) Montrez que $\forall\ n \in \mathbb{N}$ on a $0 \leq u_n \leq 1$
2) Montrez que u est décroissante. En déduire que u est convergente puis calculer sa limite.

3)Soit $V_n = \dfrac{u_n^2}{1 + u_n^2}$

a/Montrez que V est une suite géométrique ; calculer V_n en fonction de n b/Montrez que $\forall\ n \in \mathbb{N}$ $u_n = \dfrac{1}{\sqrt{2^{n+1}-1}}$; retrouver $\lim_{n\to+\infty} u_n$