Classe :3 ème Math	SERIE D' EXERCICES Arithmétique	Prof : Yahmadi Rafik A.scolaire : 2010/2011

Exercice 1 : Vrai-faux.

Justifier chaque affirmation, par une démonstration ou présenter un contre exemple.

1) L'égalité $31 = 3 \times 9 + 4$ permet d'affirmer que :
   a) 4 est le reste de la division euclidienne de 31 par 9.
   b) 4 est le reste de la division euclidienne de 31 par 3.
2) Si $a|9$ et $a|4$, alors $a|31$.
3) Le nombre de diviseurs d'un entier naturel non nul est toujours pair.
4) 2 est toujours un diviseur du produit de deux entiers consécutifs.
5) 3 est toujours un diviseur du produit de trois entiers consécutifs.
6) 3 est toujours un diviseur du produit de trois entiers impairs distincts.
7) Si d est un diviseur de a, alors d² est un diviseur de a².
8) Dans la division euclidienne de 229 par 12, le quotient est 18 et le reste 13.
9) Le reste dans la division euclidienne de 2013 par 8 est 5.

L'égalité $3754 = 123 \times 29 + 187$ permet de définir une division euclidienne

10) Pour tout entier naturel n ; a) PPCM (n ; 2n +1) = n (2n + 1) b) PPCM (n – 1 ; n + 1) = n² – 1
11) Si $n = 3^{24} \times 5$ et $m = 3^{7} \times 7$ alors PPCM (m ; n) = 7n
12) Un entier divisible par 4 et 15 est aussi divisible par 60.
13) Si les entiers m et n vérifient 1111m = 1515n, alors m est un multiple de 1515.

Exercice 2 :

1) Résoudre dans l'ensemble des entiers naturels non nuls, $\begin{cases} a + b = 56 \\ \text{ppcm}(a, b) = 105. \end{cases}$
2) Résoudre dans l'ensemble des entiers naturels non nuls, $\begin{cases} \text{pgcd}(a, b) = 56 \\ \text{ppcm}(a, b) = 108. \end{cases}$

Exercice 3:

Soit $n \in IN^*$.

1) Montrer que tout diviseur commun aux nombres 5n – 3 et n + 1 est un diviseur de 8.
2) En déduire que 5n – 3 et n + 1 sont premiers entre eux si n est pair.
3) Déterminer l'ensemble des entiers n tels que l'on ait : $(5n – 3)\wedge(n + 1) = 8$.

Exercice 4:

Soit : $A = n^3 + 3n^2 - 7$ et $B = n + 1$ deux nombres entiers définis pour n entier > 2.

a) Montrer que tout diviseur commun à A et B divise 5.
b) Déduire, de ce qui précède, quelle particularité doit présenter n pour que A et B admettent pour pgcd 5.

Exercice 5:

Pour tout entier naturel $n \geq 5$, on considère les nombres : $a = n^3 – n^2 – 12n$ et $b = 2n^2 – 7n – 4$

1) Montrer, après factorisation, que a et b sont des entiers naturels divisibles par n – 4.
2) On pose $\alpha = 2n + 1$ et $\beta = n + 3$. On note d le PGCD de α et β.
   a) Etablir une relation entre α et β indépendante de n.
   b) Démontrer que d est un diviseur de 5.
   c) Démontrer que les nombres α et β sont multiples de 5 si, et seulement si, n–2 est multiple de 5
3) Montrer que 2n + 1 et n sont premiers entre eux.
4) Déterminer, suivant les valeurs de n et en fonction de n le PGCD de a et b.

Exercice 6:

Partie A : Soit x un nombre réel.

1) Montrer que $x^4 + 4 = (x^2 + 2)^2 – 4x^2$
2) En déduire que $x^4 + 4$ peut s'écrire comme produit de deux trinômes à coefficients réels.

Partie B : Soit n un entier naturel supérieure ou égal à 2.

On considère les entiers : $A = n^2 – 2n + 2$ et $B = n^2 + 2n + 2$ et d leur PGCD.

Montrer que $n^4 + 4$ n'est pas premier.

1) Montrer que tout diviseur de A qui divise n, divise 2.
2) Montrer que tout diviseur commun à A et B, divise 4n.
3) Dans cette question, on suppose que n est impair.
   a) Montrer que A et B sont impairs. En déduire que d est impair.
   b) Montrer que d divise n.
   c) En déduire que d divise 2, puis que A et B sont premiers entre eux.