- $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \ell \iff \forall \varepsilon > 0,\ \exists \alpha > 0 \text{ tel que } x \neq x_0 \text{ et } |x - x_0| < \alpha \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon$

- $\lim\limits_{x \to +\text{ou}-\infty} f(x) = \ell \iff \forall \varepsilon > 0,\ \exists r > \text{ou} < 0 \text{ tel que } x > \text{ou} < r \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon$

- $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\text{ou}-\infty \iff \forall A > \text{ou} < 0,\ \exists \alpha > 0 \text{ tel que}$
  $x \neq x_0 \text{ et } |x - x_0| < \alpha \Rightarrow f(x) > \text{ou} < A$

- $\lim\limits_{x \to +\text{ou}-\infty} f(x) = +\infty \iff \forall A > 0,\ \exists r > \text{ou} < 0 \text{ tel que } x > \text{ou} < r \Rightarrow f(x) > A$

- $\lim\limits_{x \to +\text{ou}-\infty} f(x) = -\infty \iff \forall A < 0,\ \exists r > \text{ou} < 0 \text{ tel que } x > \text{ou} < r \Rightarrow f(x) < A$
- $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \ell \iff \lim\limits_{x \to x_0} (f(x) - \ell) = 0 \iff \lim\limits_{x \to x_0} |f(x) - \ell| = 0$

- Si une limite existe en x_0 ou $\pm\infty$ alors elle est unique en x_0 ou $\pm\infty$.

- On suppose $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \ell$ et $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = \ell'$

  $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) + g(x) = \ell + \ell'$ $\qquad$ $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)g(x) = \ell\ell'$

  $\lim\limits_{x \to x_0} \lambda f(x) = \lambda\ell'$ $\qquad$ $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\ell}{\ell'} \text{ si } \ell' \neq 0$

- On suppose $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \ell$ et $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = +\infty$

  $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) + g(x) = +\infty$ $\qquad$ $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)g(x) = \begin{cases} +\infty \text{ si } \ell > 0 \\ -\infty \text{ si } \ell < 0 \\ ? \text{ si } \ell = 0 \end{cases}$

  $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{1}{g(x)} = 0\pm$ $\qquad$ $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{1}{f(x)} = +\infty \text{ si } \ell = 0 \text{ et } f(x) > 0$

- Soient f et g des fonctions telles que $f \leq g$
  $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \ell$ et $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = \ell' \Rightarrow \ell \leq \ell'$

- <u>Théorème des Gendarmes</u> : soient f, g, h des fonctions :
  - $f \leq g \leq h$ et $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0} h(x) = \ell \Rightarrow \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \ell$
  - $f \leq g \leq h$ et $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty \Rightarrow \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = +\infty$

- f est bornée et $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = 0 \Rightarrow \lim\limits_{x \to x_0} f(x)g(x) = 0$

- $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = \ell\ (\pm\infty) \Rightarrow \lim\limits_{x \to x_0} g \circ f(x) = \ell\ (\pm\infty)$

- Soient $P(x)=a_nx^n+\ldots+a_0$ et $Q(x)=b_px^p+\ldots+b_0$ des polynômes

a_n et b_p strictement positifs $\Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{A(x)}{B(x)} = \begin{cases} +\infty & \text{si } n > p \\ a_n/b_n & \text{si } n = p \\ 0 & \text{si } n < p \end{cases}$

- L'existence de la limite implique l'égalité à gauche et à droite

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \ell \iff \lim_{x\to x_0-} f(x) = \lim_{x\to x_0+} f(x) = \ell$$

-

Continuité

- f est continue en x_0

$$\iff \quad \lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0) \iff \lim_{x\to x_0-} f(x) = \lim_{x\to x_0+} f(x) = f(x_0)$$

$$\iff \quad \forall \varepsilon > 0,\ \exists \alpha > 0,\ |x - x_0| < \alpha \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

- Toutes les fonctions usuelles citées au premier chapitre sont continues sauf la fonction partie entière (E).
- Les sommes, produits, quotients et composés de deux fonctions continues, sous condition d'être défini(e)s, sont continu(e)s.

- Soient f : I→ℝ et g : J→ℝ des fonctions telles que f(I)⊂J
  $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \ell$ et g continue en $\ell \Rightarrow \lim\limits_{x\to x_0} g\circ f(x) = g(\ell)$

- Les formes indeterminées se résolvent généralement par factorisation du terme dominant ou tendant vers zéro.

$\infty.0 \qquad \infty\text{-}\infty \qquad 0^0 \qquad \infty/\infty \qquad 0/0 \qquad \infty^0 \qquad 1^\infty$

- Fonctions lipschitzienne $\iff \exists K > 0\ \forall x, y\ \ |f(x) - f(y)| \le K|x - y|$
  Une fonction lipschitzienne est continue sur Df.

- f : [a,b]→R continue
  f(a).f(b) < 0 ⇒ il existe c∈[a,b] tel que f(c)=0

  Corrolaire : tout polynôme de degré impair admet au moins une racine réelle.

- Théorème des Valeurs Intermediaires :

  f : [a,b]→R continue et f(a) < f(b)
  Pour tout k∈[f(a),f(b)], il existe c∈[a,b] tel que f(c)=k

- f : I→R est continue, I est un intervalle
  ⇒ f(I) est un intervalle et f(I)=][inf(f),sup(f)][

- f non majoré ⇒ sup(f)=+∞ f non minoré ⇒ inf(f)=-∞

- f :[a,b]→R continue ⇒ f est borné (admet un max et min sur [a,b])

- f :[a,b]→R continue et ↗ ou ↘ ⇒ f([a,b]) = [f(a),f(b)] ou [f(b),f(a)]

- Si f est strictement monotone et continue, f[a,b] est une bijection.
- f :I$\rightarrow$f(I) continue et bijective $\Rightarrow$ f^{-1}:f(I)$\rightarrow$I bijection réciproque