DÉRIVATION

I. Nombre dérivé en un point

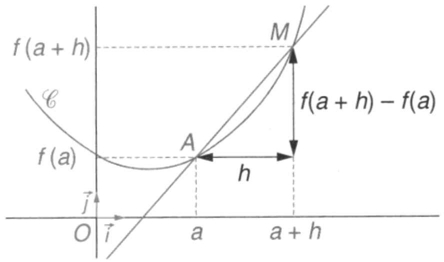
1) Taux de variation

Soit f une fonction définie sur un intervalle I ; a et $a+h$ sont deux réels distincts de l'intervalle I, avec $h \neq 0$. $\mathcal{C}_f$ est la courbe représentative de la fonction f dans un repère.

> On appelle taux de variation de f entre a et $a+h$ le nombre $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$.

Interprétation graphique

Le taux de variation de f entre a et $a+h$ est la pente de la droite (AM) avec $A(a, f(a))$ et $M(a+h, f(a+h))$.



Interprétation économique

Le taux de variation de f entre a et $a+h$ est le l'accroissement moyen de la fonction f (coût, bénéfice, etc.) entre a et $a+h$.

2) Nombre dérivé de f en un point a.

Définition

> Lorsque le quotient $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ tend vers un nombre réel lorsque h tend vers 0, on dit que ce réel est le nombre dérivé de f en a et on le note $f'(a)$.
> On dit aussi que la fonction f est dérivable en a.

En d'autres termes, dire que f est dérivable en a signifie que lorsque h « se rapproche » de 0, alors $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ « se rapproche » d'un réel noté $f'(a)$.

Ce que l'on note mathématiquement : $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = f'(a)$.

Un exemple de calcul…

f est la fonction carré, définie sur $\mathbb{R}$. Est-elle dérivable en 2 ?

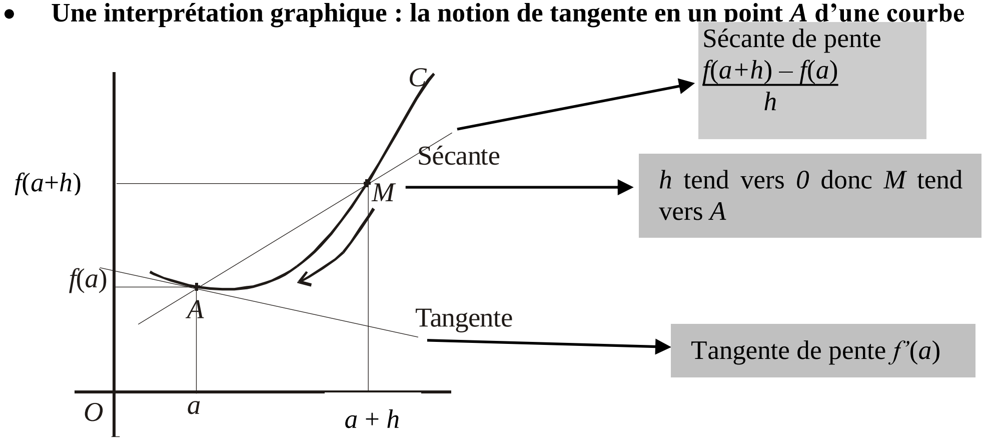
On calcule d'abord : $f(2+h)=(2+h)^2 = 4+4h+h^2$ … si bien que :

$$\frac{f(2+h)-f(2)}{h} = \frac{4+4h+h^2-4}{h} = \frac{4h+h^2}{h} = \frac{h(4+h)}{h} = 4+h.$$

Lorsque h tend vers 0, $4+h$ tend vers 4.
On a donc $f'(2) = 4$.
Remarquons que la calculatrice donne le résultat, ou parfois une valeur approchée…

2)Deux interprétations

- **Une interprétation graphique : la notion de tangente en un point A d'une courbe**



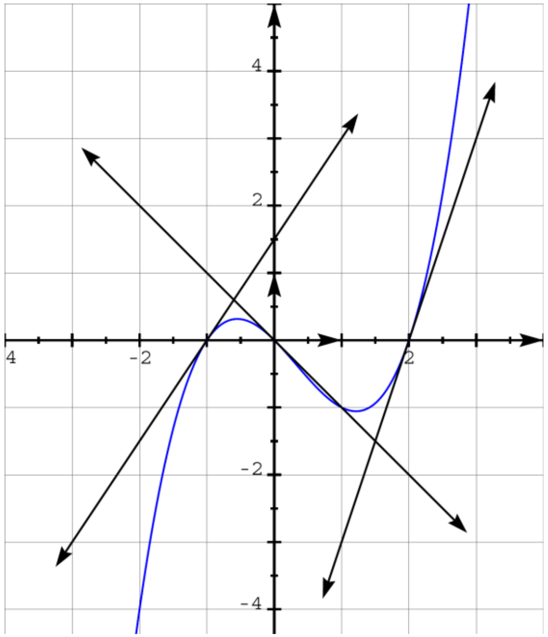
Quand on fait tendre h vers 0, le point M se rapproche donc du point A en restant sur la courbe. La droite (AM) se rapproche d'une position limite, qui définit la tangente à la courbe au point considéré. Cette tangente a pour pente $f'(a)$.

Lecture graphique

Le nombre dérivé est donc la pente de la tangente à la courbe au point A d'abscisse a… pente qu'on sait lire graphiquement pour peu que la tangente soit tracée…
Ainsi si on considère la courbe suivante, et les tangentes tracées, on peut affirmer que :

$f'(-1) =$
$f'(0) =$
$f'(2) =$

tandis que $f(-1) =$, $f(0) =$ et $f(2) =$.



Équation de la tangente

On connaît sa pente… $f'(a)$. L'équation de cette tangente est de la forme :

$$y = f'(a)x + p.$$

Comme elle passe par le point $A(a, f(a))$, les coordonnées de A vérifie cette équation. On a donc :

$$f(a) = f'(a) \times a + p$$

si bien que $p = f(a) - f'(a) \times a$.
L'équation de la tangente est donc :

$$y = f'(a)x + f(a) - f'(a) \times a \text{ soit } y = f'(a)(x - a) + f(a).$$

Ce résultat général peut être connu. À défaut, la méthode doit être parfaitement maîtrisée.

- **Une interprétation économique : la notion de coût marginal**

On note C la fonction coût total, qui, à une quantité q produite, associe le coût total $C(q)$ pour produire cette quantité (coûts fixes + coûts variables).

> Le *coût marginal de production* est l'accroissement de coût résultant de la production d'une unité supplémentaire. Autrement dit :
> $$C_m(q) = C(q+1) - C(q)$$

$C_m(q)$ est donc le taux de variation de la fonction C entre q et $q + 1$:

$$C_m(q) = C(q+1) - C(q) = \frac{C(q+1) - C(q)}{(q+1) - q}$$

On considère en général que 1 est petit par rapport aux quantités produites. On admet que $C_m(q)$ est sensiblement égal à $C'(q)$, nombre dérivé de la fonction C en q.

II. Fonction dérivée

1) Définition.

On dit que f est *dérivable* sur un intervalle I lorsque, pour tout réel de l'intervalle I, le nombre dérivé de f en x existe.
Par définition, la fonction dérivée f' est la fonction qui à tout réel x de l'intervalle I associe $f'(x)$, nombre dérivé de f en x.

Exemple

- Si f est la fonction carré, définie sur ρ, on a vu que le nombre dérivé de f en tout réel a est $f'(a) = 2a$ (la pente de la tangente à la courbe au point d'abscisse a est $2a$) : la fonction f est donc dérivable puisque le nombre dérivé de f en tout réel a existe.
On peut alors définir la fonction dérivée de f, notée f', par :

$$f' : a \mapsto f'(a) = 2a$$

- Quelle est la pente de la fonction f définie par $f(x) = ax + b$? de la fonction f définie par $f(x) = k$, où k est un nombre réel ?

2) Dérivées usuelles

On admet les formules de dérivation pour les fonctions usuelles ci-dessous.

Fonction	**Dérivée**	**Validité**
$f(x) = k$	$f'(x) = 0$	k nombre réel constant ; $x \in$ ρ
$f(x) = x$	$f'(x) = 1$	$x \in$ ρ
$f(x) = x^2$	$f'(x) = 2x$	$x \in$ ρ
$f(x) = x^3$	$f'(x) = 3x^2$	$x \in$ ρ
$f(x) = x^n$	$f'(x) = nx^{n-1}$	n entier naturel supérieur ou égal à 2 ; $x \in$ ρ

Fonction	Dérivée	Validité
$f(x) = \frac{1}{x}$	$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$	$x \in \rho^*$
$f(x) = \frac{1}{x^2}$	$f'(x) = -\frac{2}{x^3}$	$x \in \rho^*$
$f(x) = \frac{1}{x^n}$	$f'(x) = -\frac{n}{x^{n+1}}$	n entier naturel non nul $x \in \rho^*$
$x \mapsto \sqrt{x}$	$x \mapsto \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$x \in]0 ; +\infty[$

3) Opérations et dérivées

u et v sont des fonctions dérivables sur un intervalle I et k est un nombre réel fixé.

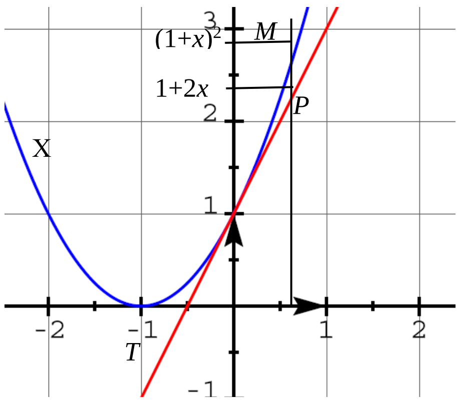
Fonction		Dérivée	Dérivabilité
Somme $f = u + v$		$f' = u' + v'$	dérivable sur l'intervalle I
Produit	$f = ku$ $f = uv$	$f' = ku'$ $f' = u'v + uv'$	dérivable sur l'intervalle I
Quotient	$f = \frac{1}{v}$ $f = \frac{u}{v}$	$f' = -\frac{v'}{v^2}$ $f' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$	dérivable pour les x de I où $v(x) \neq 0$

Remarquons que si $f = u^2 = u \times u$, alors $f' = u'u + uu' = 2uu'$.

III. Approximation d'un pourcentage

- On considère la fonction f définie sur $[-1 ; 1]$ par $f(x) = (1 + x)^2$.

X est sa courbe représentative dans un repère. On considère le point A d'abscisse 0.
Pour tout réel x, on sait que $f'(x) = 2(1 + x)$ si bien que $f(0) = 1$ et $f'(0) = 2$.
Déterminons l'équation de la tangente T à la courbe X au point A. L'équation est
$y = f'(0)(x-0) + f(0)$ soit
$y = 2(x-0)+1$ ou $y = 2x+1$.
Lorsque x est très proche de 0, la courbe est très proche de sa tangente.



Par conséquent, on peut écrire que $(1+x)^2 \approx 1+2x$, pour x proche de 0 (l'erreur quand on remplace $(1+x)^2$ par $1 + 2x$ est mesurée par la longueur MP, qui devient d'autant plus petite que x se rapproche de 0.
D'ailleurs algébriquement :

$$(1+x)^2 - (1+2x) = x^2$$

qui est d'autant plus petit que x est petit.

Interprétation économique
Lorsqu'un prix subit de hausses successives de t %, avec t petit, son nouveau prix est :

$$\left(1+\frac{t}{100}\right)^2 P$$

où P désigne son ancien prix.
D'après la propriété précédente, il est à peu près égal à :

$$\left(1+\frac{2t}{100}\right)P$$

Il est donc dans ce cas à peu près équivalent de dire que le prix a augmenté de $2t$ %.

- On admet que, lorsque n est un entier naturel, $(1 + x)^n$ peut être approximé par $1 + nx$ lorsque x est proche de 0.

Interprétation économique
Pour un taux t faible, n hausses successives de t % équivalent pratiquement à une hausse de nt %.