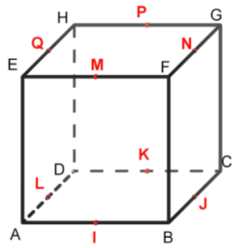
Lycée : Habib Thamer Classe :3 ème Math	SERIE D' EXERCICES N°(19) Produit scalaire-Produit vectoriel dans l'espace	Prof : Regaig Farhat Ascolaire : 2008/2009

Exercice 1 :Vrai-faux.

1) ABCDEFGH est un cube. I, J, K, L, M, N, P et Q sont les milieux respectifs de [AB], [BC], [CD], [DA][EF], [FG], [GH], [HE]



Répondre par vrai ou faux en justifiant la réponse.

a) Les vecteurs $\overrightarrow{AQ}, \overrightarrow{BN}, \overrightarrow{QP}$ sont coplanaires.

b) $\overrightarrow{AC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{AK}$.

c) Les droites (AG) et (BH) sont sécantes.

d) Les vecteurs $\overrightarrow{IB}, \overrightarrow{FG}, \overrightarrow{AC}$ sont coplanaires.

e) $\frac{1}{2}\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AP}$.

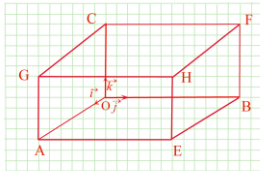
f) Les droites (EK) et (HI) sont sécantes.

g) Les droites (MN) et (KH) sont sécantes.

h) Le plan (IJN) coupe la face ADHE suivant [LQ].

Exercice 2:

On considère le pavé ci-dessous dans le repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$, tel que $\overrightarrow{OA} = 4\,\vec{i}, \overrightarrow{OB} = 6\,\vec{j}, \overrightarrow{OC} = 3\,\vec{k}$



1) Déterminer les coordonnées des points E, F, G et H.

2) a) Placer le point I milieu de [HF].

   b) Déterminer les coordonnés de I.

3) Déterminer les coordonnés de point M pour que EAMI soit un rectangle.

Exercice 3 :

On considère un cube ABCDEFGH. $\left(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}\right)$ est un repère.

1) Déterminer les coordonnées des différents sommets du cube.

2) a) Déterminer les coordonnées du milieude [HB] et celles du milieu de [CE].

   b) Que peut on conclure?

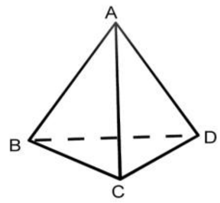
3) Soit K le symétrique de G par rapport à H, I le milieu de [BC] et J le milieu de [DH].

   a) Déterminer les coordonnées de K, I et J.

   b) En déduire que $\overrightarrow{IJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BK}$.

Exercice 4 :

On considère un tétraèdre ABCD. On appelle I, J, K et L les points définis par $\overrightarrow{AI} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BJ} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CK} = \frac{2}{3}\overrightarrow{CD}$ et $\overrightarrow{DL} = \frac{1}{3}\overrightarrow{DA}$.



1) Placer les points I, J, K et L

2) Exprimer $\overrightarrow{IJ}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BC}$, puis en fonction de $\overrightarrow{AC}$.

3) Justifier que les points I, J, K et L sont coplanaires et que la droite (AC) est parallèle au plan (IJK).

4) Démontrer que la droite (BD) est parallèle au plan (IJK).

Exercice 5 :

L'espace est muni d'un repère $\left(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$

1) Dans chaque cas suivant déterminer les réels a et b pour que A, B et M soient alignés

   a) A(2, 3, 0), B(3, 4, 1) et M(a, b, 2).

   b) A(5, 0, 1), B(1, 0, 3) et M(3 , a, b).

2) Déterminer les réels a et b pour que les points A(2, 3, 1), B(1, 2, 0), C(3, 1, – 2) et M(a, b, 3) soient coplanaires

Exercice 6 :

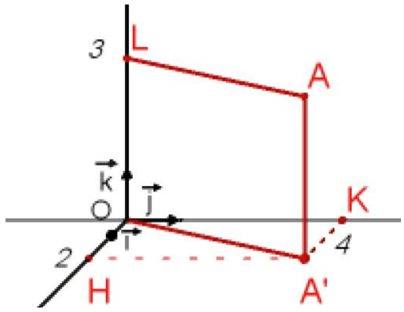
1) Dans la figure ci-contre, *OHA'K* et *OA'AL* sont deux parallélogrammes tels que $\overrightarrow{OH} = 2\,\vec{i}$, $\overrightarrow{OK} = 4\,\vec{j}$ et $\overrightarrow{OL} = 3\,\vec{k}$

a) Exprimer $\overrightarrow{OA'}$ en fonction de $\vec{i}$ et $\vec{j}$

b) Exprimer alors $\overrightarrow{OA}$ en fonction de $\vec{i}$, $\vec{j}$ et $\vec{k}$.

2) On suppose que $\begin{cases} \vec{i} \perp \vec{j}\ ;\ \vec{i} \perp \vec{k}\ ;\ \vec{j} \perp \vec{k} \\ \text{et } \left\|\vec{i}\right\| = \left\|\vec{j}\right\| = \left\|\vec{k}\right\| = 1 \end{cases}$ Calculer *OA*

3) Soit *M(x, y, z)* dans le repère (O, $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$). Exprimer *OM* en fonction de x, y et z.



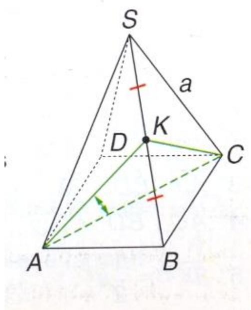
Exercice 7 :

Soit ABCDS une pyramide à base carrée de sommet S dont toutes les arêtes ont même mesure a. K est le milieu de l’arête [SB].

1) Calculer, en fonction de a, les produits scalaires :

   a) $\overrightarrow{SA}.\overrightarrow{SB}$; b) $\overrightarrow{SA}.\overrightarrow{SC}$; c) $\overrightarrow{SA}.\overrightarrow{BC}$; d) $\overrightarrow{SA}.\overrightarrow{AC}$; e) $\overrightarrow{SB}.\overrightarrow{AC}$; f) $\overrightarrow{AK}.\overrightarrow{AC}$

2) Déterminer une mesure de l’angle $K\hat{A}C$



Exercice 8 :

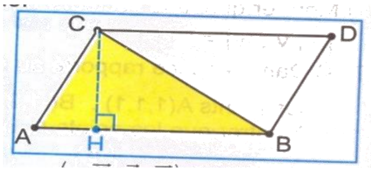
La figure ci-contre représente un cube ABCDFGHE tel que AB = 1.

1) Vérifier que le repère $\left(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AF}\right)$ est orthonormé direct de ξ.
2) Calculer les produits vectoriels suivants :

   $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AD}$; $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$; $\overrightarrow{AC} \wedge \overrightarrow{BD}$; $\overrightarrow{AC} \wedge \overrightarrow{AH}$; $\overrightarrow{AC} \wedge \overrightarrow{AG}$ et $\overrightarrow{AG} \wedge \overrightarrow{BH}$

Exercice 9 :

Soient un triangle ABC et H le pied de sa hauteur issue de C.Soit le point D tel que ABDC soit un parallélogramme.
On désigne par A l’aire du parallélogramme ABDC.



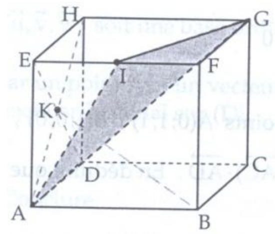
1) Montrer que A = $\left\| \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} \right\|$
2) En déduire l’aire du triangle ABC.
3) Soient les points A(1, 2, 3), B(4, 2, -1) et C(2, -2, 2) de l’espace ξ rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$. Calculer l’aire du triangle ABC.

Exercice 10 :

Soit les points A(3 ;2 ;4), B(0 ;3 ;5), C(0 ;2 ;1) et D(3 ;1 ;0).

1) Démontrer que ABCD est un parallélogramme.
2) Calculer l’aire du parallélogramme ABCD.
3) Soit E le point défini par : $\overrightarrow{AE} = \frac{1}{3}.\left(\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AD}\right)$.Déterminer les coordonnées de E.
4) Calculer le volume de la pyramide droite de base ABCD et de hauteur AE.

Exercice 11 :



ABCDEFCH est un cube de côté 1. L'espace est orienté par le repère orthonormé direct $\left(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}\right)$.
I est le milieu de [EF] et K est le centre du carré ADHE.

1) Vérifier que $\overrightarrow{BK} = \overrightarrow{IG} \wedge \overrightarrow{IA}$. En déduire l'aire du triangle ICA.
2) Calculer le volume du tétraèdre BICA. . En déduire la distance du point B au plan (ICA).

Exercice 12 :

Dans l’espace (E) est rapporté à un repère orthonormé $\left(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k}\right)$ On considère les points A(2,2,0) ; B(0,2,2) et C(1,0,1).

1) Calculer les coordonnées de $\vec{u} = \overrightarrow{CA} \wedge \overrightarrow{CB}$.
2) Déterminer une équation cartésienne du plan P contenant les points A, B et C.
3) D étant l’intersection du plan P et de l’axe $\left(O, \vec{i}\right)$, E étant l’intersection du plan P et de l’axe $\left(O, \vec{k}\right)$.
   a) Calculer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{DE}$ et $\overrightarrow{AB}$. Calculer $\overrightarrow{DA}.\overrightarrow{DE}$.
   b) Que pouvez-vous déduire quand à la nature du quadrilatère ABED ?
4) a) Montrer que le triangle ABC est isocèle et calculer son aire.
   b) Calculer une mesure en degré de l’angle $A\hat{C}B$.
5) Calculer les coordonnées du centre de gravité du triangle ABC.
6) a) Calculer la distance du point I(0 ;2 ;0) au plan P.
   b) Déterminer le volume du tétraèdre IBCA par deux méthode≠.

Exercice 13 :

Soient $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs non coplanaires de W.
On désigne par O, A, B et C les points de l’espace tels : $\overrightarrow{OA} = \vec{u}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{v}$ et $\overrightarrow{OC} = \vec{w}$
Soit M le point de l’espace tel que $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{OB}$
Soit H le projeté orthogonal de C sur la droite (OM).

1) a) Montrer que $\left|\left(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\right)\right|$ = OM . OH

   b) En déduire le volume du parallélépipède OADBCA’D’B’.
2) Soit un tétraèdre ABCD. On désigne par v son volume.

   a) Montrer que v = $\frac{1}{6}\left|\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}\right)\right|$

   b) Calculer v si l’on sait que A(1, 1, 1), B(2, 0, 0), C(0, 3, 0) et D(0, 0, -2) dans un repère orthonormé direct de l’espace.