Chapitre n°1 : Suites réelles

Résumé du cours

1 - Principe du raisonnement par récurrence

Théorème

Soit n_0 un entier naturel fixé. Soit (P_n) une propriété relative à un entier naturel $n \geq n_0$.

Pour démontrer par récurrence que la propriété (P_n) est vraie pour tout $n \geq n_0$, on doit :

1. **- Vérifier que cette propriété est vraie pour l'entier naturel n_0.**
2. **- On démontre que : Si l'on suppose que la propriété (P_n) est vraie à un rang $n \geq n_0$, alors, elle est encore vraie au rang n+1.**

2 -Suites arithmétiques – Suites géométriques :

Suites arithmétiques :

Définition :

Une suite réelle U_n définie sur $I=\{n \in \mathbb{N}, n \geq n_0\}$ est une suite arithmétique de raison r lorsqu'on a : pour tout $n \geq n_0$:

$U_{n+1} - U_n = r$.

Remarque : Le réel r est constant (ne dépend pas de n).

Terme général d'une suite arithmétique :

Soit U_n une suite arithmétique de premier terme U_0 et de raison r.

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $U_n = U_0 + n\,r$.
- Pour tout n et p des entiers naturels, on a :
  $U_n - U_p = (n - p)\,r$.

Somme des termes d'une suite arithmétique :

Soit U_n une suite arithmétique de premier terme U_0 et de raison r.

Alors on a : $S_n = \sum_{k=0}^{k=n} U_k = \frac{(n+1)}{2}(U_0 + U_n)$.

Plus généralement, on a : $S = \sum_{k=p}^{k=n} U_k = \frac{(n-p+1)}{2}(U_p + U_n)$

D'où on a la règle suivante pour calculer la somme des termes d'une suite arithmétique :

$$\boxed{\text{Somme} = \left(\frac{\text{nombre de termes}}{2}\right)(\text{premier terme} + \text{dernier terme})}$$

Suites géométriques :

Définition :

Une suite réelle U_n définie sur $I=\{n \in \mathbb{N}, n \geq n_0\}$ est une suite géométrique de raison q lorsqu'on a : pour tout $n \geq n_0$:

$U_{n+1} = q\,U_n$.

Remarque : Le réel q est constant (ne dépend pas de n).

Si q = 1, on aura : $U_{n+1} = U_n$; U_n est une suite constante.

Terme général d'une suite géométrique :

Soit U_n une suite géométrique de raison q.

- Pour tout $n \geq n_0$ et $p \geq n_0$, on a : $U_n = U_p \times q^{(n-p)}$.
- En particulier, on a : $U_n = U_0 \times q^n$, pour tout n.

Somme des termes d'une suite géométrique :

Soit U_n une suite géométrique de raison $q \neq 1$, on a :

$S_n = \sum_{k=p}^{k=n} U_k = U_p\left(\frac{1-q^{n-p+1}}{1-q}\right)$.

Limite d'une suite géométrique :

Soit U_n une suite géométrique de raison q et de premier terme u_0

On a :

Si q = 1, U_n est constante, d'où : $\lim_{n\to+\infty} u_n = u_0$.

Si $-1 \langle\, q \,\langle\, 1 \quad alors \lim_{n\to+\infty} u_n = 0.$

Si $q \,\rangle\, 1 \quad alors \begin{cases} si\ u_0 \rangle\, 0 \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty \\ si\ u_0 \,\langle\, 0 \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} u_n = -\infty \end{cases}$

Si $q \,\langle\, -1$, u_n n'admet pas de limite .

SUITES

Suites arithmétiques

- $U_{n+1} = U_n + r$
- $U_n = U_p + (n-p)r \;\Rightarrow\; U_n = U_0 + nr$
- $\sum_{i=0}^{n-1} U_i = nU_0 + \frac{n(n-1)}{2} r = n \times \frac{U_0 + U_{n-1}}{2}$

Suites géométriques

- $U_{n+1} = U_n q$
- $U_n = U_p \times q^{n-p} \;\Rightarrow\; U_n = U_0 \times q^n$
- $q \le -1 \;\Rightarrow\; (U_n)$ n'a pas de limite et diverge de U_0

  $0 \le |q| < 1 \;\Rightarrow\; (U_n)$ converge vers U_0

  $q > 1 \;\Rightarrow\; (U_n)$ tend vers $\pm\infty$
- $\sum_{i=0}^{n-1} U_i = U_0 \times \frac{1-q^n}{1-q} = \frac{U_0 - U_n}{1-q}$

Suites monotones, bornées, périodiques

- Si la fonction f est croissante sur $[a;+\infty[$, la suite définie par $U_n = f(n)$ est croissante pour $n \ge a$. Attention : la réciproque est fausse (la suite peut-être croissante alors que la fonction ne l'est pas).
- Une suite à la fois majorée et minorée est appelée suite bornée.
- (U_n) est périodique de période p lorsque $U_{n+p} = U_n$.

Limites de suites

- $\lim U_n - l = 0 \Rightarrow \lim U_n = l$
- $|U_n - l| \leq V_n$ et $\lim V_n = 0 \Rightarrow \lim U_n = l$
- $\left.\begin{array}{l} V_n \leq U_n \leq W_n \\ \lim V_n = \lim W_n = l \end{array}\right| \Rightarrow \lim U_n = l$ (Théorème des gendarmes)
- $\lim U_n = l$ et $\lim V_n = l'$ et $U_n \leq V_n \Rightarrow l \leq l'$
- $\lim U_n = l$ et $\lim V_n = l'$ et $l < l' \Rightarrow U_n < V_n$
- Les termes de (U_n) appartiennent à l'intervalle de la fonction f :
  $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = l$ et $\lim\limits_{x \to l} f(x) = l' \Rightarrow \lim\limits_{n \to +\infty} f(U_n) = l'$