Classe : 3ème Maths	**RÉSUMÉ DE COURS** *Géométrie dans l'éspace*	Mr : Yahmadi Rafik 2010 / 2011

1. Vecteurs coplanaires :

*Trois vecteurs non nuls $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$ sont dits coplanaires si les points A , B , C et D sont situé dans le même plan .

* Remarque : Si deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires alors pour tout vecteurs $\vec{w}$, les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires .

*Théorème : $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires { famille liée } s'il existe deux réels α et β tels que $\vec{w} = \alpha\,\vec{u} + \beta\,\vec{v}$

2. Vecteur d'un plan :

le vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\\ \gamma\end{pmatrix}$ est un vecteur de P : a x + b y + c z + d = 0 $\Leftrightarrow \alpha x + \beta y + \gamma c = 0$

3. vecteur normal à un plan :

* <u>Définition :</u>

$\vec{n}$ est un vecteur normal à un plan P $\Leftrightarrow$ $\vec{n}$ est un vecteur directeur d'une droite D perpendiculaire à P

* <u>Théorème :</u>

Si P : a x + b y + c z + d = 0 alors $\vec{n}\begin{pmatrix}a\\ b\\ c\end{pmatrix}$ est un vecteur normal à P .

Tout plan de vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix}a\\ b\\ c\end{pmatrix}$ à une équation cartésienne de la forme : a x + b y + c z +d = 0 .

4. Parallélisme et orthogonalité

Soient D et D' deux droites de l'espace de vecteurs directeurs respectives $\vec{u}$ et $\vec{u'}$, P et P' deux plans de vecteurs normaux respectives $\vec{n}$ et $\vec{n}'$

$D \perp D' \Leftrightarrow \vec{u} \perp \vec{u'}$, $D \parallel D' \Leftrightarrow$ $\vec{u}$ et $\vec{u'}$ sont colinéaires.

D et D' non coplanaires $\Leftrightarrow$ $\vec{u}$ et $\vec{u'}$ non colinéaires et $D \cap D' = \varnothing$.

$P \parallel P' \Leftrightarrow$ $\vec{n}$ et $\vec{n}'$ sont colinéaires , $P \perp P' \Leftrightarrow \vec{n} \perp \vec{n}'$

$P \parallel D \Leftrightarrow \vec{n} \perp \vec{u}$, $P \perp D \Leftrightarrow$ $\vec{n}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires.

5. Produit vectoriel :

<u>Définition :</u>

Soit deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, on appelle produit vectoriel de $\vec{u}$ par $\vec{v}$ le vecteur noté $\vec{u} \wedge \vec{v}$ définie comme suit :

- Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0}$.
- Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires alors $\begin{cases} \vec{u} \wedge \vec{v} \text{ est orthogonal à } \vec{u} \text{ et à } \vec{v} \\ (\vec{u}, \vec{v}, \vec{u} \wedge \vec{v}) \text{ est une base directe} \\ \|\vec{u} \wedge \vec{v}\| = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \sin\alpha \end{cases}$

Où α est une mesure de l'angle géométrique déterminer par deux représentants de même origine de $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

Formules :

Soient les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix};\vec{v}\begin{pmatrix}a'\\b'\\c'\end{pmatrix}$ et $\vec{w}\begin{pmatrix}a''\\b''\\c''\end{pmatrix}$:

*dét$(\vec{u},\vec{v},\vec{w})$ = $a\begin{vmatrix}b' & b''\\c' & c''\end{vmatrix}-b\begin{vmatrix}a' & a''\\c' & c''\end{vmatrix}+c\begin{vmatrix}a' & a''\\b' & b''\end{vmatrix}$ = a(b' c''- c' b'') - b(a' c'' - c' a'') +c(a' b''- a'' b') .

* $\vec{u}.\vec{v}=\|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|\cos(\vec{u},\vec{v})$ = a a' + b b' + c c' .

* $\vec{u}\wedge\vec{v}=(bc'-cb')\vec{i}+(ca'-ac')\vec{j}+(ab'-ba')\vec{k}$

* Soit D une droite de vecteur directeur $\vec{u}$ et A un point de D . d(M, D)= $\dfrac{\|\overrightarrow{MA}\wedge\vec{u}\|}{\|\vec{u}\|}$.

* l'aire d'un parallélogramme ABCD est égale à $\|\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AD}\|$

* l'aire d'un triangle ABC est égale $\frac{1}{2}\|\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\|$.

* Le volume d'un parallélépipède ABCDEFGH est égale à $\left|(\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AD}).\overrightarrow{AE}\right|$ = $\left|\text{dét}(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE})\right|$.

* le volume d'un tétraèdre ABCD est égale à $\frac{1}{6}\left|(\overrightarrow{BC}\wedge\overrightarrow{BD}).\overrightarrow{BA}\right|$ = $\frac{1}{6}\left|\text{dét}(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BD},\overrightarrow{BA})\right|$

* Soit P : a x + b y + c z = 0 et A (x_0,y_0,z_0) alors d(A, P) = $\dfrac{|ax_0+by_0+cz_0|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$

Sphère :

Equation : $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2$ est l'équation de la sphère de centre I(a , b ,c) et de rayon R

- l'ensemble des points M tels que : $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}$ = 0

- Soit E l'ensemble des points M tels que : $x^2+y^2+z^2+\alpha x+\beta y+\gamma z+\lambda=0$

  Soit T= $\frac{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}{4}-\lambda$

  Si T $>$ 0 alors E est la sphère de centre I $(\frac{-\alpha}{2},\frac{-\beta}{2},\frac{-\gamma}{2})$ et de rayon $\sqrt{T}$,

  Si T = 0 alors E est le point I $(\frac{-\alpha}{2},\frac{-\beta}{2},\frac{-\gamma}{2})$,

  Si T $<$ 0 alors E est le vide .

Position d'un plan et d'une sphère :

Soit S = $S_{(A,R)}$ une sphère et un plan P , notons h= d(A, P) .

1) Si h $\succ$ R , $S\cap P=\varnothing$

2) Si h = R , $S\cap P=\{A\}$ (le plan et la sphère sont tangents)

3) Si h $\prec$ R , $S\cap P$ est un cercle de rayon $\sqrt{R^2-h^2}$ et de centre H le projeté orthogonal de A sur P .

(H$\in P$; $\overrightarrow{AH}$ et $\overrightarrow{n_P}$ sont colinéaires)