Lycée : Habib Thamer Classe : 3 ème Math et science	**SERIE D' EXERCICES N°(2)** Produit scalaire dans le plan	Prof : Regaig Farhat A.scolaire : 2008/2009

Exercice 1 : VRAI – FAUX. :

1) Si ABCD est un parallélogramme tel que : AB = 6, AD = 4 et $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD} = -12$, alors :
   a) AC = 27   b) $B\widehat{A}D = 120°$ c) $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AD} = 4$
2) Si ABC est un triangle rectangle en A et H, le pied de la hauteur issue de A, alors :
   a) $AH^2 = HB \times HC$ b) $BA^2 = BH \times BC$

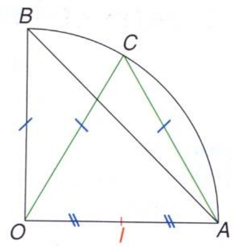
Exercice 2 : VRAI – FAUX. :

On se place dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) Soit les points A (1 ; 1) et B (-2 ; 6). La droite Δ d'équation cartésienne 3x-5y +1= 0 est perpendiculaire à la droite (AB).
2) La droite passant C (0 ;-1) et de vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix}2\\-3\end{pmatrix}$ est tangente au cercle d'équation : $x^2 + y^2 - 2x - 8y + 4 = 0$.

Exercice 3 :

Sur un quart de cercle de rayon 1, on considère le point C tel que OAC est un triangle équilatéral.



1) Déterminer les mesures, en radians, des angles $C\hat{A}B$ et $C\hat{O}B$
2) Calculer $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AO}$ et $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{OB}$.
3) Calculer $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AB}$ de deux façons différentes et en déduire la valeur de cos $\frac{\pi}{12}$

Exercice 4 :

ABCD est un carré de côté 3. On définit les points I et J par : $\overrightarrow{BI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{DJ} = \frac{1}{3}\overrightarrow{DC}$

1) a) Calculer $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{DJ}$ et $\overrightarrow{BI}.\overrightarrow{AD}$
   b) En exprimant de deux façons le produit scalaire $\overrightarrow{AI}.\overrightarrow{AJ}$, déterminer la mesure, en radians, de l'angle $I\hat{A}J$.
2) Soit H la projection orthogonale de J sur (AI).
   Démontrer que H est le centre de gravité de ABC.
3) Déterminer l'ensemble (ξ) des points M du plan qui vérifient $\overrightarrow{MI}.\overrightarrow{MJ} = 0$

Exercice 5 :

On considère un triangle ABC tel que AB = 4, AC = 6, BC = 8.On désigne par I = A * B et J = A * C.

1) Calculer cos (BÂC) et $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$
2) Calculer CI
3) Déterminer et construire l'ensemble Γ = {M, M ∈ P tels que $MA^2 + MB^2 = 10$}
4) a) Calculer $\overrightarrow{IA}.\overrightarrow{IC}$
   b) Déterminer et construire l'ensemble ζ = {M, M ∈ P tels que $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MC} = 7$ }
5) soit O = I * J et (O, $\vec{u}$) un repère de (IJ) tels que $\vec{u} = \frac{1}{4}\overrightarrow{IJ}$
   a) Montrer que ∀ M ∈ P, $MI^2 - MJ^2 = 8\,\overline{OH}$ où H est projeté orthogonal de M sur (IJ)
   b) Déterminer et construire l'ensemble Δ = {M, M ∈ P tels que : $MA^2 + MB^2 - 2\,\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MC} = -6$ }
   c) Vérifier que Δ est tangente à ζ.

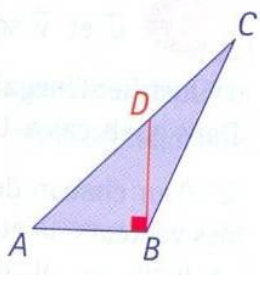
Exercice 6 :

ABCD est un carré de côté 4 cm. I et J sont définis par les relations : $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{BJ} = \frac{3}{4}\overrightarrow{BC}$

1) On pose $\vec{u} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AD}$. Justifier que le repère $(A;\vec{u},\vec{v})$ est orthonormal.
2) Quelles sont les coordonnées dans ce repère des points A, B, C, D, I et J?
3) Calculer alors les produits scalaires : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{IJ}$
4) Soit M un point de la droite (CD), défini par la relation : $\overrightarrow{DM} = x\overrightarrow{DC}$
   a) Quelles sont les coordonnées de M dans le repère $(A;\vec{u},\vec{v})$?
   b) Déterminer alors la position du point M pour que la droite (BM) soit perpendiculaire à la droite (IJ).

Exercice 7 :

ABD est un triangle isocèle rectangle en B.
On pose a = AB
Les points A, D et C sont alignés dans cet ordre et DC = DB.



1) Déterminer les longueurs des segments de la figure et les angles du triangle ABC.
2) En exprimant de deux façons le produit scalaire $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB}$, calculer la valeur exacte de $\cos\frac{\pi}{8}$

Exercice 8 :

$[AB]$ est un segment de longueur 6 et de milieu I .

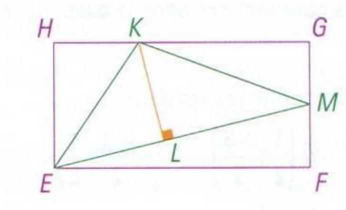
1) Déterminer et construire l'ensemble $\Re$ des points M du plan vérifiant : $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BM}.\overrightarrow{AB}=12$
2) On cherche à déterminer l'ensemble Γ des points M du plan vérifiant l'égalité (1) MB=2MA
   a) Montrer que l'égalité (1) est équivalente à : $(\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MA}).(\overrightarrow{MB}-2\overrightarrow{MA})=0$
   b) En utilisant les points R, barycentre de (A ; 2) et (B ; 1) et S, barycentre de (A ;-2) et (B ; 1), déterminer et construire l'ensemble Γ

Exercice 9 :

EFGH est un rectangle, avec EH = a et EF = 2a.

M est le milieu de [FG] et K est définie par $\overrightarrow{HK}=\frac{1}{3}.\overrightarrow{HG}$.

L est le projeté orthogonal de k sur (EM).



1) Calculer en fonction de a les produits scalaires : $\overrightarrow{EF}.\overrightarrow{EM}$ et $\overrightarrow{EH}.\overrightarrow{EK}$.
2) En calculant de plusieurs façons le produit scalaire $\overrightarrow{EK}.\overrightarrow{EM}$, déterminer :

-La valeur de la longueur EL en fonction de a ;

-Une mesure de l'angle $K\hat{E}M$ (à 0,1° près)

Exercice 10 :

ABC est un triangle isocèle en B tel que AB = 6 et AC = 4.

1) Construire le barycentre G des points pondérés (A ; -1), (B ; 2) et (C ; 2).
2) Démontrer que les droites (GC) et (AC) sont perpendiculaires.
3) On considère l'ensemble D des points M du plan tel que : $(-\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}).\overrightarrow{CG}=12$.
   a) Montrer que $M\in D \Leftrightarrow \overrightarrow{GM}.\overrightarrow{CG}=-4$
   b) Vérifier que A est un point de D.
   c) En déduire que $M\in D \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}.\overrightarrow{CG}=0$, identifier l'ensemble D et le construire.

Exercice 11 :

Dans le plan orienté, on considère un carré direct ABCD de centre O et de coté a.

On marque les points E et F respectivement sur les côtés [AB] et [AD] tel que AF = BE = $\frac{2}{3}$ a.

1) a) Montrer que $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{EB}=\overrightarrow{OB}.\overrightarrow{AF}$.
   b) En déduire que les vecteurs $\overrightarrow{OE}$ et $\overrightarrow{OF}$ sont orthogonaux.
2) Montrer que $\overrightarrow{CE}.\overrightarrow{CF}=a^2$, en déduire la valeur de cos $E\hat{C}F$
3) a) Montrer que pour tout $M\in P$: $2MA^2 + MB^2 = 3\,ME^2 + \frac{2}{3}a^2$ et $MA^2 + 2MD^2 = 3MF^2 + \frac{2}{3}a^2$
   b) Montrer que l'ensemble Δ des points M de P tels que : $MA^2 + MB^2 = 2MD^2$ est la médiatrice de [EF]
4) Déterminer l'ensemble des points M de P tels que : $MA^2 + MB^2 + MC^2 + MD^2 = 6a^2$

Exercice 12 :

Dans un plan P on considère un rectangle ABCD tel que AB = 2 BC = 2 (l'unité de longueur étant choisie).

Soit J le point du segment [CD] tel que CJ = $\frac{1}{2}$. La droite(BJ) coupe (AC) en I et coupe (AD) en K .

A)

1) Faire une figure illustrant les données ci-dessous puis vérifier que AC = $\sqrt{5}$.
2) Démontrer que $\overrightarrow{CA}\overrightarrow{CB}$ = $\overrightarrow{CA}\overrightarrow{CJ}$.
3) En déduire que (BJ) $\perp$ (AC) (on montrera que $\overrightarrow{BJ}.\overrightarrow{AC}$ = 0).
4) a) Calculer la distance BJ.
   b) Démontrer que BI = $\frac{2}{\sqrt{5}}$.
   c) Calculer alors le produit scalaire $\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{BJ}$.
5) a) Démontrer que D est le barycentre de deux points pondérés (A, 3) et (K, 1).
   b) En déduire que $\overrightarrow{AK}.\overrightarrow{BC}=4$.

B)

On considère les ensembles suivants : E = {M ; $M\in P$ et $MA^2 + MB^2 = 6$} et F = {M ; $M\in P$ et $3.MA^2 + MK^2 = 16$}.

1) a) Vérifier que C appartient à E.
   b) Déterminer alors l'ensemble E et le construire.
2) a) Vérifier que A appartient à F.
   b) Déterminer alors l'ensemble F et le construire.
3) Déterminer l'ensemble Γ={M ;$M\in P$ tels que $(3\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MK}).(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB})=0$ }.