❖ *Comment calculer un produit scalaire*

1) **En utilisant la définition** : Soit $\vec{u}=\overrightarrow{OA}$ et $\vec{v}=\overrightarrow{OB}$ deux vecteurs :

- $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB}=0$ si $\vec{u}=\vec{0}$ ou $\vec{v}=\vec{0}$
- $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB}=OA.OB.\cos\left(\widehat{AOB}\right)$ si $\vec{u}\neq\vec{0}$ et $\vec{v}\neq\vec{0}$

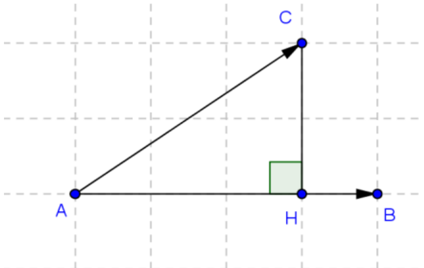
Application 1 : Soit ABC un triangle isocèle tel que AB = AC = a, $a\in IR^*{}_+$ et $\widehat{BAC}=\frac{2\pi}{3}$. Calculer $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$.

2) **En utilisant l'une des propriétés suivantes** :

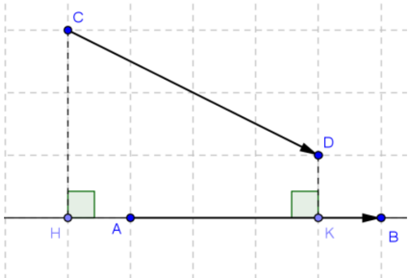
- $\vec{u}.\vec{v}=\frac{1}{2}\left(\|\vec{u}+\vec{v}\|^2-\|\vec{u}\|^2-\|\vec{v}\|^2\right)=\frac{1}{4}\left(\|\vec{u}+\vec{v}\|^2-\|\vec{u}-\vec{v}\|^2\right)$
- $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB}=\frac{1}{2}\left(OA^2+OB^2-AB^2\right)$: Formule d'EL KHASHI

Application 2 : Soit ABC un triangle tel que AB = 5, AC = 4 et BC = 7. Calculer $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$.
Application 3 : Soit ABCD un parallélogramme tel que AC = 13 et BD = 7. Calculer $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}$.

3) **En utilisant la projection orthogonale** :



$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AH}$ et $\overrightarrow{AH}=\frac{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}}{\|\overrightarrow{AB}\|^2}.\overrightarrow{AB}$



$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{HK}$ et $\overrightarrow{HK}=\frac{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD}}{\|\overrightarrow{AB}\|^2}.\overrightarrow{AB}$

Application 4 : ABCD un carré de côté a et de centre O. I = A * B, J = B * C , K = C * D et L = D * A.
Calculer , en fonction de a, les produits scalaires suivants : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CL}$, $\overrightarrow{AJ}.\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{OB}.\overrightarrow{CD}$
Application 5 : Soit ABC un triangle rectangle en B et M un point du côté [AB]. On désigne par N le projeté orthogonal de M sur [AC]. On donne AC = 15, MB = 5 et AM = NC = a, $a\in IR^*{}_+$.

a) Montrer que $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AN}$.
b) En déduire que AM x AB = AN x AC.
c) Déterminer alors le nombre a.

4) **En utilisant l'expression analytique** : L'espace est rapporté à un repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$

- Si $A(x_A, y_A)$, $B(x_B, y_B)$ et $C(x_C, y_C)$ alors $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=\left(x_B-x_A\right)\left(x_C-x_A\right)+\left(y_B-y_A\right)\left(y_C-y_A\right)$
- Si $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$ alors $\vec{u}.\vec{v}=xx'+yy'$

Application 6 : Soit ABCD un carré de côté 1. I = A * B, J = B * C , K = C * D et L = D * A.
Calculer les produits scalaires suivants : $\overrightarrow{DI}.\overrightarrow{DB}$, $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CL}$, $\overrightarrow{AJ}.\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{JK}.\overrightarrow{JA}$

<u>Remarques</u>

- $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires ssi $\left|\vec{u}.\vec{v}\right|=\|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|$
- $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires et de même sens ssi $\vec{u}.\vec{v}=\|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|$.
- $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires et de sens contraires ssi $\vec{u}.\vec{v}=-\|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|$

Application 7 : Soit ABCD un rectangle tel que AB = 6 et BC = $2\sqrt{3}$. I = A* B.
Calculer les produits scalaires suivants : $\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD}$ et $\overrightarrow{DC}.\overrightarrow{IA}$.

❖ *Calculer le cosinus d'un angle*

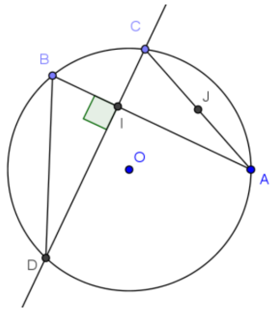
Soit A, B et C trois points distincts deux à deux. $\cos\left(\widehat{BAC}\right) = \dfrac{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}}{AB.AC}$

Application 8 : Soit ABCD un carré de côté 1. I et J les milieu respectifs de [BC] et [CD].

1°) Calculer les côtés du triangle AIJ.

2°) Calculer $\overrightarrow{AI}.\overrightarrow{AJ}$. En déduire la valeur exacte de $\cos\left(\widehat{BAC}\right)$ puis une valeur approchée à un degré prés

❖ *Utiliser le produit scalaire pour montrer que deux droites sont perpendiculaires*



Définitions : 1) $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux ssi $\vec{u}.\vec{v} = 0$

2) $\left(\vec{i}\,,\,\vec{j}\right)$ est une base orthonormée ssi $\vec{i}.\vec{j} = 0$ et $\left\|\vec{i}\right\| = \left\|\vec{j}\right\| = 1$.

Remarque :

Si $\vec{u}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$, dans une base orthonormé, alors $\vec{v}\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$ est orthogonal à $\vec{u}$.

Si de plus $\vec{u} \neq \vec{0}$ alors $\left(\dfrac{1}{\|\vec{u}\|}\vec{u}\,,\;\dfrac{1}{\|\vec{v}\|}\vec{v}\right)$ est une base orthonormée.

Application 9 :

Dans la figure ci-contre (AB) et (CD) sont perpendiculaires en I et J = A*C.

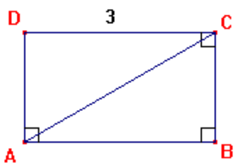
a) Vérifier que $\overrightarrow{IJ} = \dfrac{1}{2}\left(\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IC}\right)$ et que $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{ID} - \overrightarrow{IB}$

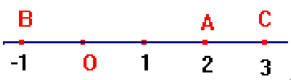
b) Calculer $\overrightarrow{IJ}.\overrightarrow{BD}$.

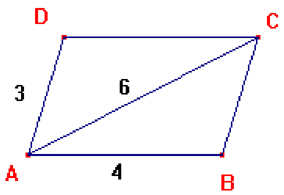
c) En déduire que les droites (IJ) et (BD) sont perpendiculaires

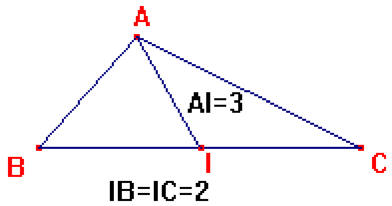
❖ *Exercices d'applications*

<u>Exercice n° : 1</u> Pour chacune des 4 figures suivantes, calculer $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$.

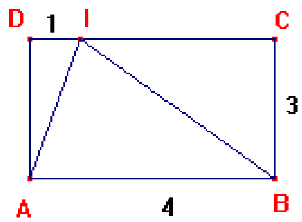


,


,


,


<u>Exercice n° : 2</u>

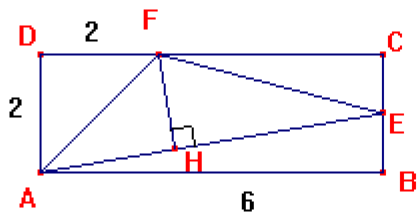


Soit ABCD un rectangle et I le point défini comme indique la figure

a) Montrer que $\overrightarrow{IA}.\overrightarrow{IB} = \overrightarrow{ID}.\overrightarrow{IC} + DA^2$.

b) En déduire que $\cos\left(\widehat{AIB}\right) = \dfrac{\sqrt{5}}{5}$

<u>Exercice n° : 3</u>



Soit ABCD un rectangle tel que AB = 6 et AD = DF = 2

E est le milieu de [BC] et H est le projeté orthogonal de F sur (AE).

1°) Calculer $\overrightarrow{AF}.\overrightarrow{AE}$.

2°) Pour la suite de l'exercice, on admet que $\overrightarrow{AF}.\overrightarrow{AE} =$ 14.

a) En calculant d'une autre manière le produit scalaire, déterminer la longueur AH.

b) En calculant d'une autre manière le produit scalaire, déterminer $\cos\widehat{EAF}$

3°) Soit I le milieu de [FE] et G le centre de gravité du triangle AEF.

Montrer que $\overrightarrow{AG} = \dfrac{1}{3}\left(\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AF}\right)$. En déduire la longueur AG.