Lycée : Habib Thamer Classe :3 ème Math	SERIE D' EXERCICES N°(18) Suites réelles	Prof : Regaig Farhat Ascolaire : 2008/2009

Exercice 1 : Vrai-faux.

1) Une suite (U_n) est définie sur IN par : $\begin{cases} U_0 = 1,5 \\ U_{n+1} = 2U_n - 1 \end{cases}$ pour tout entier naturel n.

a) La suite (U_n) converge vers 1, abscisse du point d'intersection des droites d'équations : $y = x$ et $y = 2x - 1$
b) La suite (V_n), définie sur IN par $V_n = U_n - 1$, est géométrique.
c) La suite (V_n) est majorée

2) Deux suites (X_n) et (Y_n) sont définies pour $n > 0$ par: $X_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + ... + \frac{1}{2n}$ et $Y_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + ... + \frac{1}{2n}$ Alors:

a) Les suites (X_n) et (Y_n) sont toutes les deux croissantes.
b) Les suites (X_n) et (Y_n) ne sont pas majorées.
c) $X_3 = \frac{19}{20}$ et $Y_3 = \frac{37}{60}$

3) On définit alors la suite (V_n) sur IN par $V_n = \frac{-2}{U_n}$.

a) Si (U_n) est convergente, alors (V_n) est convergente.
b) Si (U_n) est minorée par 2, alors (V_n) est minorée par -1.
c) Si (U_n) est décroissante, alors (V_n) est croissante.
d) Si (U_n) est divergente, alors (V_n) converge vers zéro.

Exercice 2 :

On considère la suite (U_n) définie, pour tout entier naturel non nul, par $U_n = \sqrt{n} - \sqrt{n-1}$.

1) En calculant leurs carrés, comparer les nombres : $\left(\sqrt{n+1} + \sqrt{n-1}\right)$ et $2\sqrt{n}$
2) En déduire que la suite (U_n) est décroissante.
3) On pose $S_n = U_1 + U_2 + ... + U_n$. Exprimer S_n en fonction de n. Quel est le sens de variation de (S_n)?

Exercice 3 :

Soit (U_n), la suite définie par: $U_n = \frac{2n+1}{n+3}$.

1) Déterminer le sens de variation de cette suite ; en déduire un minorant.
2) Montrer que cette suite est majorée par 2.
3) Exprimer $2 - U_n$ en fonction de n. En déduire pour quels rangs p on a : $1,999 \le U_p \le 2$.
Combien la suite (U_n) possède-t-elle de termes n'appartenant pas à l'intervalle [1,999; 2]?

Exercice 4 :

1) On définit, pour tout entier naturel $n > 0$, la suite (U_n) par $U_n = \frac{n^2}{2^n}$ et la suite (V_n) par $V_n = \frac{U_{n+1}}{U_n}$

a) Vérifier que $\forall\, n \in IN^*$ $V_n = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^2$. En déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} V_n$

b) Montrer que, pour tout entier naturel $n > 0$on a : $V_n > \frac{1}{2}$

c) Trouver le plus petit entier N tel que, si $n \ge N$, $V_n < \frac{3}{4}$

d) En déduire que si $n \ge N$, alors $U_{n+1} < \frac{3}{4} U_n$

2) On pose, pour tout entier naturel $n \ge 5$: $S_n = U_5 + U_6 + \ldots + U_n$.

1) Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel $n \ge 5$: $U_n \le \left(\frac{3}{4}\right)^{n-5} U_5$

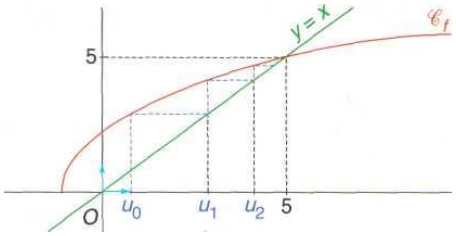
2) Montrer que, pour tout entier naturel $n \ge 5$: $S_n \le \left[1 + \frac{3}{4} + \left(\frac{3}{4}\right)^2 + ... + \left(\frac{3}{4}\right)^{n-5}\right] U_5$

3) En déduire que, pour tout entier naturel $n \ge 5$: $S_n \le 4U_5$

3) Montrer que la suite $(S_n)_{n \ge 5}$ est croissante et en déduire qu'elle bornée.

Exercice 5 :

On considère la suite (U_n) définie par: $U_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n ; $U_{n+1} = \sqrt{4U_n + 5}$



1) A l'aide de la représentation graphique ci-dessus, ou f est définie par $f(x) = \sqrt{4x + 5}$, conjecturer le sens de variation et la limite de (U_n).
2) Montrer que la suite (U_n) est croissante.
3) Montrer que la suite (U_n) est majorée par 5.

Exercice 6 :

On considère la suite (U_n) définie par : $\begin{cases} U_0 = 3 \\ U_{n+1} = 1 - \frac{1}{2}U_n \end{cases}$ et on définit la suite (V_n) par : $V_n = \left| U_n - \frac{2}{3} \right|$.

1) Montrer que, pour tout entier naturel n, on a : $V_{n+1} = \frac{1}{2} V_n$
2) Déterminer le sens de variation de la suite (V_n), puis un majorant de cette suite.
3) En déduire que la suite (U_n) est bornée ; en donner un majorant et un minorant.

Exercice 7 :

Soit la suite (U_n) définie, pour tout entier naturel non nul, par $U_n = \frac{1{,}2^n}{n^2}$

1) Donner la valeur approchée à 10^{-4} près des termes U_1 à U_8.
   Quel semble être le sens de variation de la suite?
2) Calculer de même des valeurs approchées des termes U_{10}, U_{20} et U_{50}.
   Cela confirme-t-il la conjecture de la question précédente?
3) Montrer que, pour tout entier naturel n non nul, on a : $\frac{U_n}{U_{n+1}} = \frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^2}{1{,}2}$
4) En déduire que, pour $n \geq 11$, $\frac{U_{n+1}}{U_n} \geq 1$, et conclure sur le sens de variation de la suite (U_n).

Exercice 8 :

Soit (U_n) la suite définie par : $U_0 = 2$ et $U_{n+1} = \frac{U_n}{U_n + 2}$, pour tout entier n.

1) a) Dans un plan rapporte a un repère orthonormal, tracer la courbe représentative ζ de la fonction f définie sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$ par $f(x) = \frac{x}{x+2}$
   b) En utilisant la courbe ζ et la droite D d'équation y = x, représenter les premiers termes de la suite (U_n) sur l'axe des abscisses.
2) a) Démontrer que, pour tout réel x de l'intervalle $]0 ; +\infty[$, f(x) appartient a l'intervalle $]0 ; +\infty[$.
   b) Déduire que la suite (U_n) est définie pour tout entier n et que $U_n > 0$.
3) a) Démontrer que, pour tout entier n, $\frac{U_{n+1}}{U_n} \leq \frac{1}{2}$
   b) En remarquant que $\frac{U_n}{U_0} = \frac{U_n}{U_{n-1}} \times \frac{U_{n-1}}{U_{n-2}} \times \ldots \times \frac{U_1}{U_0}$ démontrer que $U_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

Exercice 9 :

On considère la fonction numérique f définie sur $\left[-\frac{3}{2};+\infty\right[$ par $f(x) = \sqrt{2x+3}$ et la suite (U_n) définie par son premier terme U_0 et la relation de récurrence : $U_{n+1} = f(U_n)$.

A/ On prend $U_0 = 0$.

1) Tracer la courbe représentative de f et construire les premiers termes de la suite (U_n).
2) Montrer que si $x \in [0 ; 3]$, alors $f(x) \in [0 ; 3]$.
3) En déduire que tous les termes de la suite appartiennent à l'intervalle [0; 3].
4) Montrer que, pour tout entier naturel n, on a l'égalité : $U_{n+1} - U_n = \frac{(3 - U_n)(U_n + 1)}{\sqrt{2U_n + 3} + U_n}$ En déduire le sens de variation de la suite.

B/ On prend maintenant $U_0 = 4$. En adaptant les questions de la partie A, montrer que la suite (U_n) est minorée par 3 et est décroissante.

Exercice 10 :

Soit f la fonction définie sur] – 2, + ∞[par f(x) = $\frac{2x+1}{x+2}$.

On note (ζ) la courbe représentative de f et D la droite d'équation y = x dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, dont les tracés se trouvent sur la feuille annexe 2 (à rendre avec la copie)

1) Déterminer les abscisses des deux points d'intersection de (ζ) et de la droite (D). On appelle α_1 la plus petite abscisse et α_2 la plus grande.
2) Soit (U_n) la suite définie par $U_0 = 0$ et pour tout entier naturel n, $U_{n+1} = f(U_n)$.
   a) En utilisant la courbe (ζ) et de la droite (D), représenter sur les premiers termes de la suite (U_n) sur l'axe des abscisses. émettre une conjecture sur la convergence de la suite (U_n)
   b) Démontrer par récurrence que pour tout entier n, $0 \leq U_n \leq 1$.
   c) Etudier les sens de variation de la suite (U_n).
3) On considère la suite $(V_n)_{n \geq 0}$ définie pour tout n élément de IN par : $V_n = \frac{U_n - \alpha_2}{U_n - \alpha_1}$
   a) Montrer que (V_n) est une suite géométrique de raison $q = \frac{1}{3}$.
   b) Exprimer V_n puis U_n en fonction de n.
   c) Déduire la limite de la suite (U_n).

Exercice 11 :

Le graphique de l'annexe figurant page 3 sera complété et remis avec la copie.

Soit la fonction f définie sur l'intervalle [0 ; 2] par $f(x) = \frac{2x+1}{x+1}$

1) a) Etudier les variations de f sur l'intervalle [0 ; 2]
   b) Montrer que si x ∈[1 ; 2] , f(x) ∈[1 ; 2]
2) (U_n) et (V_n) sont deux suites définie sur IN par : ∗ $U_0 = 1$ et $U_{n+1} = f(U_n)$
   ∗ $V_0 = 2$ et $V_{n+1} = f(V_n)$
   a) Le graphique donné en annexe représente la fonction f sur l'intervalle [0 ; 2]. Construire sur l'axe des abscisses les trois premiers termes de chacune des suites (U_n) et (V_n) en laissant apparent les traits de construction. A partir de ce graphique que peut-on conjecturer concernant le sens de variation et la convergence des suites (U_n) et (V_n) ?
   b) Montrer à l'aide d'un raisonnement par récurrence que : ∗ Pour tout entier naturel n, $1 \leq V_n \leq 2$
   ∗ Pour tout entier naturel n, $V_{n+1} \leq V_n$
   On admettra de la même façon que ∗ pour tout entier naturel n, $1 \leq U_n \leq 2$
   ∗ Pour tout entier naturel n, $U_n \leq U_{n+1}$
   c) Montrer que pour tout entier naturel n, $V_{n+1} - U_{n+1} = \frac{V_n - U_n}{(V_n + 1)\ (U_n + 1)}$
   En déduire que pour tout entier naturel n , $V_n - U_n \geq 0$ et $V_{n+1} - U_{n+1} \leq \frac{1}{4}(V_n - U_n)$
   d) Montrer que pour tout entier naturel n, $V_n - U_n \leq \left(\frac{1}{4}\right)^n$
   e) On suppose que les suites (U_n) et (V_n) sont convergentes . Montrer qu'elles convergent vers un même réel α .